B.T.

HEIBERG APOLLONIUS

I.

APOLLONII PERGAEI

QUAE GRAECE EXSTANT

CUM COMMENTARIIS ANTIQUIS.

EDIDIT ET LATINE INTERPRETATUS EST

I. L. HEIBERG,

DR. PHIL.

UOL. I.

LIPSIAE

IN AEDIBUS B. G. TEUBNERI.

MDCCCXCI.

LIPSIAE: TYPIS B. G. TEUBNERI.

PRAEFATIO.

Conica Apollonii Pergaei, quae mathematicorum consensu summis iustissimisque efferuntur laudibus, post Halleium neminem editorem inuenerunt. et fortasse mathematicis, qui res solas spectant, aliquatenus interpretationibus satis fit; sed ne de iis dicam, quorum interest scire, quibus uerbis Apollonius ipse usus sit, et qua ratione formulas signaque nostrorum mathematicorum aequare potuerit, ipsis illis interpretationibus fundamentum certum tandem aliquando iactum esse oportet; quod Halleius, qui adhuc solus Conica Graece edidit, neque uoluit facere neque potuit, quae erat illis temporibus ratio artis criticae. itaque nouam editionem Conicorum codicibus Graecis perlustratis et collatis parare decreui, praesertim cum uiderem, editionem Halleii tam raram esse, ut etiam immodico pretio uix ac ne uix quidem posset comparari. sed ab initio mihi constabat, eos tantum libros, qui Graece exstarent, mihi tractandos esse. nam quamquam me non fugiebat, editionem ita mancam et quasi detruncatam fore, tamen a me impetrare non potui, ut interpretationem librorum V—VII, quam ex Arabico fecerat Halleius, nullis subsidiis criticis adiutus repeterem. et codices Arabicos propter linguae illius ignorantiam ipse adire non potui. imperfectum igitur maneat opus, donec aliquis linguae Arabicae peritus codicibus Arabicis collatis nouam recensionem illorum librorum instituerit. et ut sperare possimus, hoc breui futurum esse, effecit L. L. M. Nixius edita dissertatione, quae inscribitur Das fünfte Buch der Conica des Apollonius von Perga in der arabischen Uebersetzung des Thabit Ibn Corrah (Lipsiae 1889). qui ut opus bene et utiliter inceptum ad finem perducat, mecum optabunt, quicunque scripta mathematica Graecorum nouerunt coluntque.

Quattuor libris Conicorum, qui Graece supersunt, in uolumine altero adiungam fragmenta et Conicorum et reliquorum operum Apollonii, quae Graece habemus, et praeterea lemmata Pappi et commentaria Eutocii. constat, huius uiri recensionem librorum I—IV solam relictam esse; quare id primum mihi agendum erat, ut ea e codicibus restitueretur. quantum de pristina Conicorum forma ueri similiter statui potest, in prolegomenis criticis uoluminis alterius colligam; ibidem de cognatione codicum uberius exponam. hic breuiter indicabo, quibus codicibus nitatur recensio mea, et quanti quisque aestimandus sit. sunt igitur hi:

V — cod. Vatican. Gr. 206 bombyc. saec. XII—XIII, fol., duobus uoluminibus constans; continet fol. 1—160 Conicorum libros I—IV, fol. 161—239 Sereni opuscula. in fine mutilus est et omnino pessime habitus; singula folia plerumque charta pellucida inducta sunt. manus recentior (m. 2) lacunas quasdam (in Sereno) expleuit et in Apollonio nonnulla addidit et emendauit, manus recentissima (m. rec.) in margine nonnulla adscripsit. contuli Romae 1887.

v — cod. Vatic. Gr. 203, bombyc. saec. XIII, fol.; inter alia Conica continet fol. 56—84 e V descripta. cum e V descriptus sit, antequam is tempore et situ male habitus est, utilis est ad eos locos supplendos, qui in V euanuerunt uel correcti sunt; etiam figurae, quae interdum in V cum marginibus sublatae uel detruncatae sunt, saepe e v restitui potuerunt. inspexi codicem Romae 1887 et enotaui, quae opus esse uidebantur.

c — cod. Constantinopolitanus palatii ueteris nr. 40 bombyc. saec. XIII—XIV, fol., situ et madore paene pessumdatus, ceterum codicis V gemellus. is, cum a Fr. Blassio protractus esset et descriptus (Hermes XXIII p. 622 sq.), intercedente Ministerio nostro, quod res rationesque externas moderatur, Hauniam missus est et totus a me collatus 1889, sed cum plerumque cum V consentiat, scripturam plenam in adparatu non dedi, sed ea tantum, quae meliora praebet, sane paucissima; reliquam scripturae discrepantiam in prolegomenis criticis notabo. Conica habet fol. 349—516.

p — cod. Paris. Gr. 2342 chartac. saec. XIII, fol. totum contuli Hauniae 1888, sed cum ab homine sermonis mathematicorum Graecorum peritissimo impudenter interpolatus sit, in adparatum eas tantum scripturas recepi, quae ad uerba Apollonii emendanda facerent; reliquas prolegomenis seruaui. quae meliora habet, sine dubio pleraque coniectura inuenta sunt.

ceterorum codicum nullum prorsus usum esse, in prolegomenis demonstrabo, nisi quod e cod. Paris. 2356 chartac. saec. XVI unam et alteram coniecturam probam recepi.

itaque recensio Conicorum tota codice V nititur, cuius scripturas omnes in adparatu indicaui. sicubi eius scriptura retineri non poterat, auctorem scripturae receptae nominaui („corr."). qua in re praeter codices mihi praesto fuere:

Memus — Apollonii Pergei philosophi mathematiciqve excellentissimi Opera per Doctissimum Philosophum Ioannem Baptistam Memum Patritium Venetum Mathematicarumque Artium in Vrbe Veneta Lectorem Publicum De Graeco in Latinum Traducta et nouiter impressa. Venet. MDXXXVII fol.

Comm. uel Command. — Apollonii Pergaei conicorum libri quattuor... F. Commandinus Vrbinas mendis quamplurimis expurgata e Graeco conuertit et commentariis illustrauit. Bononiae MDLXVI fol.

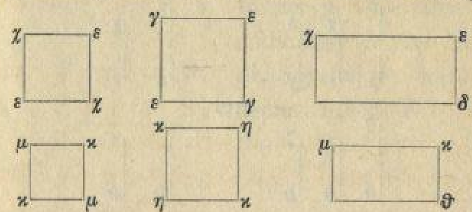
Halley — Apollonii Pergaei Conicorum libri octo et Sereni Antissensis de sectione cylindri et coni libri duo, ed. E. Halleius. Oxoniae MDCCX fol.

de fontibus horum librorum in prolegomenis uidebimus. Memo et Commandino emendationem tum quoque tribui, ubi tacite ueram scripturam interpretantur, nisi etiam errore non perspecto eodem modo interpretati essent.

in interpretatione mea propositiones Apollonii citaui libro et propositionis numero, ubi eiusdem

libri sunt, solo numero propositionis indicato; „Eucl." Elementa, „dat." Data Euclidis significat; lemmata Pappi numeris in Graeco ab Hultschio positis citantur.

Dixi infra p. 293 et alibi, in V interdum rectangula rectasque descripta esse; quae figurae quid significent, hic exponam. explicandi uiam mihi monstrauit Hieronymus G. Zeuthen, uir de Apollonio optime meritus. primum igitur in II, 50 inueniuntur hae figurae*):

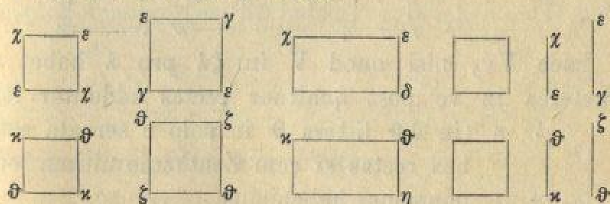


hoc est $\varepsilon\chi^2 : \varepsilon\gamma^2 : \chi\varepsilon \times \varepsilon\delta =$
$\mu\kappa^2 : \eta\kappa^2 : \mu\kappa \times \kappa\vartheta$,

itaque $\gamma\varepsilon : \varepsilon\chi : \varepsilon\delta =$
$\eta\kappa : \kappa\mu : \kappa\vartheta$,

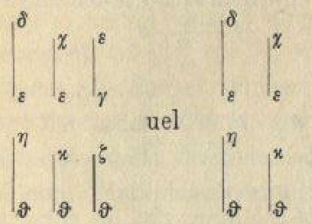
quae est ratiocinatio Apollonii p. 292, 27—294, 9. ergo figuras illas aliquis adscripsit ad ratiocinationem Apollonii illustrandam oculisque subiiciendam.

eodem modo paullo infra:



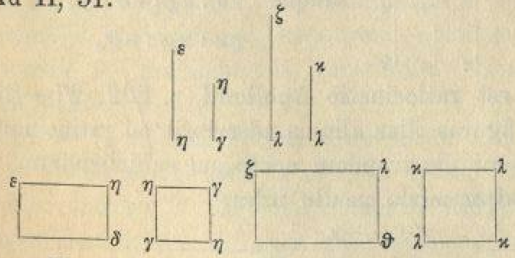
*) Ubi V mutilus est, figuras e v suppleui; c eadem fere habet

quae figurarum series ad p. 296, 17 sq. pertinet, sed tam mutila est, ut difficile sit dictu, quo modo ordinanda sit. nam in V sola secunda series rectangulorum exstat, quorum unum litteris caret; reliqua e v petita sunt. omnia ordine decurrent, si quattuor illae rectae primo loco ponentur et pro duobus quadratis litteris carentibus describentur hae rectae

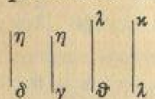


tum enim habebimus: quoniam $\chi\varepsilon : \gamma\varepsilon = \varkappa\vartheta : \vartheta\zeta$, erit $\chi\varepsilon^2 : \varepsilon\gamma^2 : \chi\varepsilon \times \varepsilon\delta = \varkappa\vartheta^2 : \vartheta\zeta^2 : \varkappa\vartheta \times \vartheta\eta$; quare $\delta\varepsilon : \chi\varepsilon : \varepsilon\gamma = \eta\vartheta : \varkappa\vartheta : \zeta\vartheta$ (uel $\delta\varepsilon : \chi\varepsilon = \eta\vartheta : \varkappa\vartheta$).

Ad II, 51:



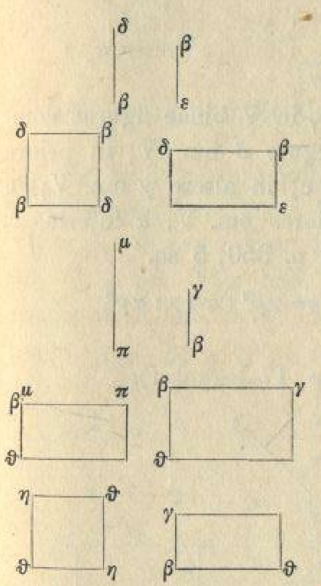
haec Vv, nisi quod V in $\zeta\lambda$ pro λ habet $\varkappa$. praeterea in vc post quattuor rectas adduntur hae



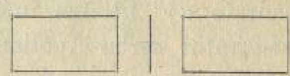
(in $\lambda\vartheta$ littera ϑ in solo c seruata est). has rectas si cum Zeuthenio ultimo loco ponemus, habebimus $\varepsilon\eta : \eta\gamma = \zeta\lambda : \varkappa\lambda$ et $\varepsilon\eta \times \eta\delta : \eta\gamma^2 = \zeta\lambda \times \lambda\vartheta : \varkappa\lambda^2$;

quare $\eta\delta : \eta\gamma = \lambda\vartheta : \varkappa\lambda$, h. e. demonstrationem ab Apollonio omissam, triangulos $\varkappa\vartheta\lambda$, $\gamma\eta\delta$ similes esse, u. p. 304, 17—19 et conf. Pappi lemma VII.

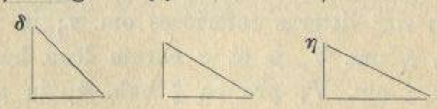
III, 15:



haec series figurarum illustrat, quae habet Apollonius p. 344, 14—24. in codicibus Vvc hae sunt discrepantiae: ante primas rectas habet V



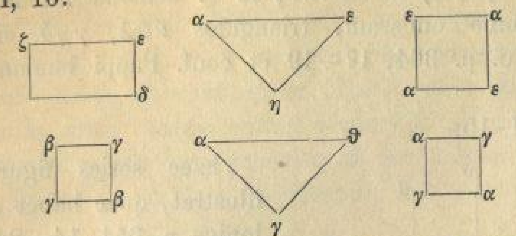
in quadrato $\delta\beta^2$ inferius β hab. vc, om. V, pro inferiore δ hab. ε Vvc; rectam $\gamma\beta$ solus c habet; in rectangulo $\beta\vartheta \times \mu\pi$ in latere inferiore add. litt. η — ϑ Vvc; rectangulum $\beta\gamma \times \beta\vartheta$ solus habet c; in quadrato $\eta\vartheta^2$ omnes litteras om. V, superiores η, ϑ vc; pro rectangulo $\gamma\beta \times \beta\vartheta$, quod omisit V, triangulum $\gamma\beta\vartheta$ habent vc; deinde v solus addit



erroribus emendatis hoc efficitur:

$$\delta\beta : \beta\varepsilon = \delta\beta^2 : \delta\beta \times \beta\varepsilon = \mu\pi : \gamma\beta$$
$$= \mu\pi \times \beta\vartheta : \beta\gamma \times \beta\vartheta = \vartheta\eta^2 : \beta\gamma \times \beta\vartheta.$$

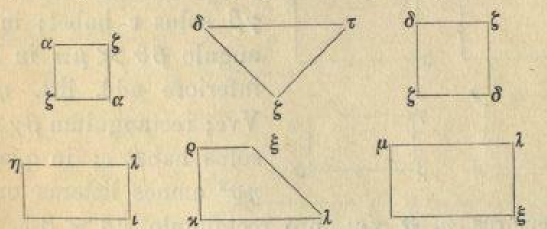
III, 16:



hunc ordinem praebet c, in V binae figurae componuntur. in primo rectangulo δ om. V; in priore triangulo ε et η permutat c, in altero γ om. V; in quadrato $\alpha\gamma^2$ litteras inferiores om. V, α inferius c. illustrantur uerba Apollonii p. 350, 5 sq.

$$\zeta\varepsilon \times \varepsilon\delta : \alpha\varepsilon\eta : \alpha\varepsilon^2 = \gamma\beta^2 : \alpha\vartheta\gamma : \alpha\gamma^2.$$

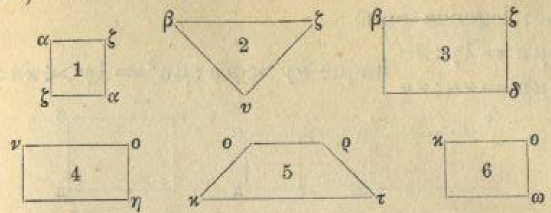
III, 19 (in extrema prop. 17 leguntur):



hanc seriem om. c, primas tres figuras hab. v, om. V; in $\alpha\zeta^2$ litteras inferiores om. v; in $\eta\lambda \times \lambda\iota$ litteras η, λ om. V, μ et α earum loco hab. v; in $\varrho\varkappa\lambda\xi$ litt. ξ om. V, pro ea ζ hab. v; in $\mu\lambda \times \lambda\xi$ litt. μ, λ hab. v, om. V. illustratur, ut uidit Zeuthen, locus p. 358, 2 sq.

$$\alpha\zeta^2 : \delta\tau\zeta : \delta\zeta^2 = \eta\lambda \times \lambda\iota : \varrho\xi\lambda\varkappa : \mu\lambda \times \lambda\xi.$$

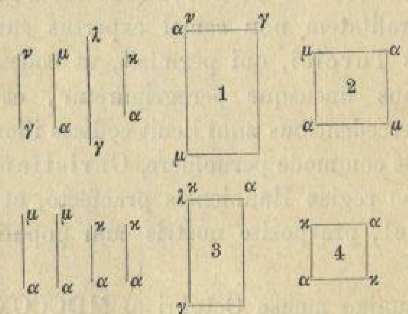
III, 21:



ordinem restituit Zeuthen; in c est $\begin{array}{cc} & 1\,2 \\ 4 & 5 \\ & 3 \end{array}$, fig. 6 hab. v, om. Vc. in fig. 1 pro inferiore α litt. δ hab. Vvc; in fig. 2 β om. Vvc, ζ om. Vv, hab. c; in fig. 3 δ om. V; in fig. 4 pro o hab. ϑ v; in fig. 5 o hab. c, ϑ v, om. V, ϱ om. V, τ hab. c, om. Vv; in fig. 6 ω om. v, pro $\varkappa$, o hab. β, ϑ. illustratur p. 362, 11 sq.

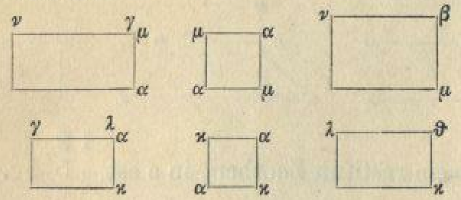
$$\alpha\zeta^2 : \beta\zeta\upsilon : \beta\zeta \times \zeta\delta = \nu o \times o\eta : \varkappa o\varrho\tau : \varkappa o \times o\omega.$$

III, 54:



has om. c; in prima recta $\varkappa\alpha$ litt. $\varkappa$ om. V, hab. v; in fig. 2 α, μ ad partes dextras om. V, hab. v; fig. 3 om. V, α om. v, pro γ hab. α. demonstratio est proportionis p. 442, 12—13 ab Apollonio usurpatae; legenda enim

$$\left.\begin{array}{l} \nu\gamma : \mu\alpha = \lambda\gamma : \varkappa\alpha \\ \mu\alpha : \mu\alpha = \varkappa\alpha : \varkappa\alpha \end{array}\right. \text{ itaque } \nu\gamma \times \mu\alpha : \mu\alpha^2 = \lambda\gamma \times \varkappa\alpha : \varkappa\alpha^2.$$



has om. c, posteriores tres om. V, hab. v; in $\nu\beta \times \beta\mu$ pro μ hab. ν uel α V; in $\lambda\vartheta\varkappa$ pro λ litt. α hab. v. legenda

$$\nu\gamma \times \mu\alpha : \mu\alpha^2 : \nu\beta \times \beta\mu = \gamma\lambda \times \alpha\varkappa : \alpha\varkappa^2 : \lambda\vartheta \times \vartheta\varkappa,$$

quae illustrant uerba Apollonii p. 442, 14—15.

Praefandi finem faciam gratias quam maximas agens et praefectis bibliothecarum Parisiensis, cuius liberalitatem non semel expertus sum, et imperatoris Turcici, qui permisit, ut codex Constantinopolitanus hucusque peregrinaretur, et iis uiris, quibus intercedentibus mihi licuit codices illos Hauniam transmissos commode peruoluere, Christiano Bruun, bibliothecae regiae Hauniensis praefecto, et Petro A. F. S. Vedel, praeposito nostris cum populis externis rationibus.

Scr. Hauniae mense Octobri a. MDCCCXC.

I. L. Heiberg.

APOLLONII CONICA.

ΚΩΝΙΚΩΝ α'.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ τῷ τε σώματι εὖ ἐπανάγεις καὶ τὰ ἄλλα κατὰ γνώμην ἐστί σοι, καλῶς ἂν ἔχοι, μετρίως δὲ ἔχομεν καὶ αὐτοί. καθ' ὃν δὲ καιρὸν ἤμην μετά σου ἐν Περγάμῳ, ἐθεώρουν σε σπεύδοντα μετασχεῖν τῶν πεπραγμένων ἡμῖν κωνικῶν· πέπομφα οὖν σοι τὸ πρῶτον βιβλίον διορθωσάμενος, τὰ δὲ λοιπά, ὅταν εὐαρεστήσωμεν, ἐξαποστελοῦμεν· οὐκ ἀμνημονεῖν γὰρ οἴομαί σε παρ' ἐμοῦ ἀκηκοότα, διότι τὴν περὶ ταῦτα ἔφοδον ἐποιησάμην ἀξιωθεὶς ὑπὸ Ναυκράτους τοῦ γεωμέτρου, καθ' ὃν καιρὸν ἐσχόλαζε παρ' ἡμῖν παραγενηθεὶς εἰς Ἀλεξάνδρειαν, καὶ διότι πραγματεύσαντες αὐτὰ ἐν ὀκτὼ βιβλίοις ἐξ αὐτῆς μεταδεδώκαμεν αὐτὰ εἰς τὸ σπουδαιότερον διὰ τὸ πρὸς ἔκπλῳ αὐτὸν εἶναι οὐ διακαθάραντες, ἀλλὰ πάντα τὰ ὑποπίπτοντα ἡμῖν θέντες ὡς ἔσχατον ἐπελευσόμενοι. ὅθεν καιρὸν νῦν λαβόντες ἀεὶ τὸ τυγχάνον διορθώσεως ἐκδίδομεν. καὶ ἐπεὶ συμβέβηκε καὶ ἄλλους τινὰς τῶν συμμεμιχότων ἡμῖν μετειληφέναι τὸ πρῶτον καὶ τὸ δεύτερον βιβλίον πρὶν ἢ διορθωθῆναι, μὴ θαυμάσῃς, ἐὰν περιπίπτῃς αὐτοῖς ἑτέρως ἔχουσιν. ἀπὸ δὲ τῶν ὀκτὼ βιβλίων τὰ πρῶτα

1. Ἀπολλωνίου Περγαίου κωνικῶν α' V. 8. εὐαρεστήσωμεν] in V εστ litterae ita coniunctae, ut similes fiant ετ. 15. διά — 16. τά] rep. mg. m. rec. V (15. εὔπλῳ) addito $\overset{\tau}{M}$ ἐξ ἀπογράφου

CONICORUM LIBER I.

Apollonius Eudemo s.

Si corpore conualescis ceteraque tibi ex sententia sunt, bene est, equidem satis ualeo. quo autem tempore tecum Pergami eram, uidebam te cupidum esse conica a me elaborata cognoscendi. quare primum librum ad te misi, postquam eum emendaui, reliquos autem, quando iis contenti erimus, mittemus. neque enim credo, te oblitum esse, quod a me audisti, me ad haec adcessisse rogatu Naucratis geometrae, quo tempore Alexandriam profectus nobiscum degeret, nosque ea in octo libris elaborata statim festinantius paullo cum eo communicasse, quod in eo esset, ut discederet, ita ut ea non perpurgaremus, sed omnia, quae nobis in mentem uenirent, poneremus sperantes fore, ut postea perpoliremus. quare iam occasionem nacti, prout correcta sunt, ea edimus. et quoniam accidit, ut etiam alii quidam eorum, qui nobiscum uersati sunt, primum alterumque libros nacti sint, priusquam correcti essent, miratus ne sis, si in eos aliam habentes formam incideris. horum uero octo librorum quattuor priores ad institutionem elementarem

εἰκονικοῦ. γρ., quia magna ex parte euan.; sed quae dedimus, hab. cv. 15. ἔκπλουν cp, fort. recte. 16. ὡς — 17. ἐπελευσόμενοι] cv; euan. V., rep. mg. m. rec.

τέσσαρα πέπτωκεν εἰς ἀγωγὴν στοιχειώδη, περιέχει δὲ τὸ μὲν πρῶτον τὰς γενέσεις τῶν τριῶν τομῶν καὶ τῶν ἀντικειμένων καὶ τὰ ἐν αὐταῖς ἀρχικὰ συμπτώματα ἐπὶ πλέον καὶ καθόλου μᾶλλον ἐξειργασμένα παρὰ τὰ ὑπὸ τῶν ἄλλων γεγραμμένα, τὸ δὲ δεύτερον τὰ περὶ τὰς διαμέτρους καὶ τοὺς ἄξονας τῶν τομῶν συμβαίνοντα καὶ τὰς ἀσυμπτώτους καὶ ἄλλα γενικὴν καὶ ἀναγκαίαν χρείαν παρεχόμενα πρὸς τοὺς διορισμούς· τίνας δὲ διαμέτρους καὶ τίνας ἄξονας καλῶ, εἰδήσεις ἐκ τούτου τοῦ βιβλίου. τὸ δὲ τρίτον πολλὰ καὶ παράδοξα θεωρήματα χρήσιμα πρός τε τὰς συνθέσεις τῶν στερεῶν τόπων καὶ τοὺς διορισμούς, ὧν τὰ πλεῖστα καὶ κάλλιστα ξένα, ἃ καὶ κατανοήσαντες συνείδομεν μὴ συντιθέμενον ὑπὸ Εὐκλείδου τὸν ἐπὶ τρεῖς καὶ τέσσαρας γραμμὰς τόπον, ἀλλὰ μόριον τὸ τυχὸν αὐτοῦ καὶ τοῦτο οὐκ εὐτυχῶς· οὐ γὰρ ἦν δυνατὸν ἄνευ τῶν προσευρημένων ἡμῖν τελειωθῆναι τὴν σύνθεσιν. τὸ δὲ τέταρτον, ποσαχῶς αἱ τῶν κώνων τομαὶ ἀλλήλαις τε καὶ τῇ τοῦ κύκλου περιφερείᾳ συμβάλλουσι, καὶ ἄλλα ἐκ περισσοῦ, ὧν οὐδέτερον ὑπὸ τῶν πρὸ ἡμῶν γέγραπται, κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια κατὰ πόσα σημεῖα συμβάλλουσι. τὰ δὲ λοιπά ἐστι περιουσιαστικώτερα· ἔστι γὰρ τὸ μὲν περὶ ἐλαχίστων καὶ μεγίστων ἐπὶ πλέον, τὸ δὲ περὶ ἴσων καὶ ὁμοίων κώνου τομῶν, τὸ δὲ περὶ διοριστικῶν θεωρημάτων, τὸ δὲ προβλημάτων κωνικῶν διωρισμένων. οὐ μὴν ἀλλὰ καὶ πάντων ἐκδοθέντων ἔξεστι τοῖς περιτυγχάνουσι κρίνειν αὐτά, ὡς ἂν αὐτῶν ἕκαστος αἱρῆται. εὐτύχει.

1. πέπτωκεν] cp, πέπτωκε V. 5. τάς] τούς V, corr. p. 9. καί] scripsi, ἤ V. 13. συνείδαμεν V (fort. recte; cfr. εἶπα); corr. v. 17. -νων ἡμῖν — τό] cv; euan. V, rep. mg. m.

pertinent, continet autem primus origines trium sectionum oppositarumque et proprietates earum principales latius uniuersaliusque expositas, quam quae ceteri de iis scripserunt, alter, quae diametri axesque sectionum et asymptotae propria habent aliaque, quae usum generalem necessariumque ad determinationes praebent; quas autem diametros quosque axes adpellem, ex hoc libro comperies. tertius uero plurima et mira continet theoremata et ad compositionem locorum solidorum et ad determinationes utilia, quorum pleraque et pulcherrima noua sunt; quibus inuentis cognoui, locum ad tres et quattuor lineas minime ab Euclide componi, sed partem tantum fortuitam eius, et id quidem non optime; neque enim fieri potuit, ut compositio sine propositionibus a nobis adiectis perficeretur. quartus autem continet, quot modis sectiones conorum et inter se et cum ambitu circuli concurrant, et praeterea alia quaedam, quorum neutrum genus a prioribus tractatum est, in quot punctis sectio coni uel ambitus circuli concurrant [cum oppositis sectionibus]. reliqui autem libri ulterius progrediuntur. primus enim eorum de minimis et maximis latius tractat, secundus de coni sectionibus aequalibus et similibus, tertius de theorematis ad determinationem pertinentibus, quartus problemata conica habet determinata. uerum enimuero omnibus editis iis, qui legent, licet, eos pro cuiusque uoluntate aestimare. uale.

rec. (add. γρ^{αι}). 18. κώνων] cv; euan. V, rep. mg. m. rec. 21. κατά] scr. ταῖς ἀντικειμέναις κατά; cfr. IV praef.

Ὅροι πρῶτοι.

Ἐὰν ἀπό τινος σημείου πρὸς κύκλου περιφέρειαν, ὃς οὐκ ἔστιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ τῷ σημείῳ, εὐθεῖα ἐπιζευχθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα προσεκβληθῇ, καὶ μένοντος τοῦ σημείου ἡ εὐθεῖα περιενεχθεῖσα περὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν εἰς τὸ αὐτὸ πάλιν ἀποκατασταθῇ, ὅθεν ἤρξατο φέρεσθαι, τὴν γραφεῖσαν ὑπὸ τῆς εὐθείας ἐπιφάνειαν, ἣ σύγκειται ἐκ δύο ἐπιφανειῶν κατὰ κορυφὴν ἀλλήλαις κειμένων, ὧν ἑκατέρα εἰς ἄπειρον αὔξεται τῆς γραφούσης εὐθείας εἰς ἄπειρον προσεκβαλλομένης, καλῶ κωνικὴν ἐπιφάνειαν, κορυφὴν δὲ αὐτῆς τὸ μεμενηκὸς σημεῖον, ἄξονα δὲ τὴν διὰ τοῦ σημείου καὶ τοῦ κέντρου τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν.

κῶνον δὲ τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς μεταξὺ τῆς τε κορυφῆς καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας κωνικῆς ἐπιφανείας, κορυφὴν δὲ τοῦ κώνου τὸ σημεῖον, ὃ καὶ τῆς ἐπιφανείας ἐστὶ κορυφή, ἄξονα δὲ τὴν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπὶ τὸ κέντρον τοῦ κύκλου ἀγομένην εὐθεῖαν, βάσιν δὲ τὸν κύκλον.

τῶν δὲ κώνων ὀρθοὺς μὲν καλῶ τοὺς πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας, σκαληνοὺς δὲ τοὺς μὴ πρὸς ὀρθὰς ἔχοντας ταῖς βάσεσι τοὺς ἄξονας.

πάσης καμπύλης γραμμῆς, ἥτις ἐστὶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ, διάμετρον μὲν καλῶ εὐθεῖαν, ἥτις ἠγμένη ἀπὸ τῆς καμπύλης γραμμῆς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν τῇ γραμμῇ εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ, κορυφὴν δὲ τῆς γραμμῆς τὸ πέρας τῆς εὐθείας τὸ πρὸς τῇ γραμμῇ, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

29. κατῆχθαι] syll. αι comp. V, mg. m. rec. „χθαι ... 17".

Definitiones I.

1. Si a puncto aliquo ad ambitum circuli, qui in eodem plano, in quo punctum, positus non est, ducta recta in utramque partem producitur, et manente puncto recta per ambitum circuli circumacta in eundem rursus locum restituitur, unde ferri coepta est, superficiem recta descriptam, ex duabus superficiebus ad uerticem inter se positis compositam, quarum utraque in infinitum crescit recta describente in infinitum producta, superficiem conicam adpello, uerticem autem eius punctum manens, axem autem rectam per punctum et centrum circuli ductam.

2. Conum autem figuram comprehensam circulo et superficie conica inter uerticem ambitumque circuli posita, uerticem autem coni punctum, quod idem est uertex superficiei, axem autem rectam a uertice ad centrum circuli ductam, basim autem circulum.

3. Conorum uero rectos adpello, qui axes ad bases perpendiculares habent, obliquos autem, qui axes ad bases perpendiculares non habent.

4. Omnis lineae curuae, quae in uno plano posita est, diametrum adpello rectam, quae a linea curua ducta omnes rectas in linea illa rectae alicui parallelas ductas in binas partes aequales secat, uerticem autem lineae terminum huius rectae in linea, singulas autem rectas parallelas ad diametrum ordinate ductas esse.

ὁμοίως δὲ καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν ἐν ἑνὶ ἐπιπέδῳ κειμένων διάμετρον καλῶ πλαγίαν μέν, ἥτις εὐθεῖα τέμνουσα τὰς δύο γραμμὰς πάσας τὰς ἀγομένας ἐν ἑκατέρᾳ τῶν γραμμῶν παρά τινα εὐθεῖαν δίχα τέμνει, κορυφὰς δὲ τῶν γραμμῶν τὰ πρὸς ταῖς γραμμαῖς πέρατα τῆς διαμέτρου, ὀρθίαν δέ, ἥτις κειμένη μεταξὺ τῶν δύο γραμμῶν πάσας τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείας εὐθείᾳ τινὶ καὶ ἀπολαμβανομένας μεταξὺ τῶν γραμμῶν δίχα τέμνει, τεταγμένως δὲ ἐπὶ τὴν διάμετρον κατῆχθαι ἑκάστην τῶν παραλλήλων.

συζυγεῖς καλῶ διαμέτρους [δύο] καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, ὧν ἑκατέρα διάμετρος οὖσα τὰς τῇ ἑτέρᾳ παραλλήλους δίχα διαιρεῖ.

ἄξονα δὲ καλῶ καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθεῖαν, ἥτις διάμετρος οὖσα τῆς γραμμῆς ἢ τῶν γραμμῶν πρὸς ὀρθὰς τέμνει τὰς παραλλήλους.

συζυγεῖς καλῶ ἄξονας καμπύλης γραμμῆς καὶ δύο καμπύλων γραμμῶν εὐθείας, αἵτινες διάμετροι οὖσαι συζυγεῖς πρὸς ὀρθὰς τέμνουσι τὰς ἀλλήλων παραλλήλους.

α'.

Αἱ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ σημεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ εἰσίν.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ τὸ A σημεῖον, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας τὸ B, καὶ ἐπεζεύχθω τις εὐθεῖα ἡ $A\Gamma B$. λέγω, ὅτι ἡ $A\Gamma B$ εὐθεῖα ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἐστίν.

5. πρός] προσ' seq. lineola fortuita V. 6. ὀρθίαν] p; ὀρθείαν V, mg. m. rec. „ὀρθίαν ut infra". 9. τέμνει] p, τέμνῃ V. 11. δύο] om. Halley cum Comm. 21. α'] cv, om. V.

5. Similiter uero etiam duarum linearum curuarum in uno plano positarum diametrum transuersam adpello rectam, quae duas illas lineas secans omnes rectas in utraque linea rectae alicui parallelas ductas in binas partes aequales secat, uertices autem linearum terminos diametri in linea positos, rectam autem, quae inter duas lineas posita omnes rectas rectae alicui parallelas ductas et inter lineas abscisas in binas partes aequales secat, singulas autem parallelas ad diametrum ordinate ductas esse.

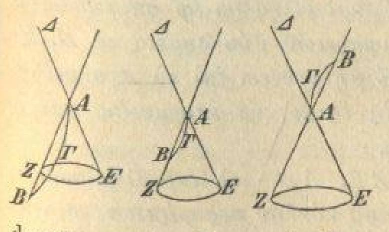
6. Coniugatas diametros adpello lineae curuae duarumque linearum curuarum rectas, quarum utraque diametrus est et rectas alteri parallelas in binas partes aequales secat.

7. Axem uero lineae curuae duarumque linearum curuarum rectam adpello, quae diametrus est lineae linearumue et parallelas ad angulos rectos secat.

8. Axes coniugatos adpello lineae curuae duarumque linearum curuarum rectas, quae diametri coniugatae sunt et altera alterius parallelas ad rectos angulos secant.

I.

Rectae a uertice superficiei conicae ad puncta superficiei ductae in superficie sunt.



sit superficies conica, cuius uertex sit A punctum, et sumatur in superficie conica punctum aliquod B, et ducatur recta aliqua $A\Gamma B$. dico, rectam $A\Gamma B$ in superficie esse.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ ἔστω, καὶ ἔστω ἡ γεγραφυῖα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα ἡ ΔΕ, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ ΕΔ, ὁ ΕΖ. ἐὰν δὴ μένοντος τοῦ Α σημείου ἡ ΔΕ εὐθεῖα φέρηται κατὰ τῆς τοῦ ΕΖ κύκλου περιφερείας, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β σημείου, καὶ ἔσται δύο εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον.

οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸ Β ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα οὐκ ἔστιν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ· ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ ἄρα ἐστί.

πόρισμα.

καὶ φανερόν, ὅτι, ἐὰν ἀπὸ τῆς κορυφῆς ἐπί τι σημεῖον τῶν ἐντὸς τῆς ἐπιφανείας ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἐντὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐὰν ἐπί τι τῶν ἐκτὸς ἐπιζευχθῇ, ἐκτὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας.

β΄.

Ἐὰν ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα ληφθῇ, ἡ δὲ ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὴν κορυφήν, ἐντὸς πεσεῖται τῆς ἐπιφανείας, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΓ, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ὁποτερασοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν δύο σημεῖα τὰ Δ, Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔΕ μὴ νευέτω ἐπὶ τὸ Α σημεῖον. λέγω, ὅτι ἡ ΔΕ ἐντὸς ἔσται τῆς ἐπιφανείας καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΕ, ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὴν τοῦ κύκλου περιφέρειαν. πιπτέ-

2. καθ'] cv; κα- euan. V, rep. mg. m. rec. 10. πόρισμα] om. V.

nam si fieri potest, ne sit, et ΔΕ sit recta superficiem describens, circulus autem, per quem fertur, sit ΕΖ. itaque, si manente puncto Α recta ΔΕ per ambitum circuli ΕΖ fertur, etiam per punctum Β ueniet, et duae rectae eosdem terminos habebunt; quod fieri non potest.

ergo fieri non potest, ut recta ab Α ad Β ducta in superficie non sit. ergo est in superficie.

Corollarium.

et manifestum est, si a uertice ad punctum aliquod eorum, quae intra superficiem sunt, recta ducatur, eam intra superficiem conicam casuram esse, et si ad aliquod eorum ducatur, quae extra sunt, extra superficiem casuram.

II.

Si in utralibet superficie earum, quae ad uerticem inter se positae sunt, duo puncta sumuntur, et recta puncta illa coniungens ad uerticem non cadit, intra superficiem cadet, producta uero in directum extra.

sit superficies conica, cuius uertex sit Α, circulus autem, per quem recta superficiem describens fertur, sit ΒΓ, et in utralibet superficie earum, quae ad uerticem sunt inter se, duo puncta sumantur Δ, Ε, et ducta ΔΕ ne cadat ad punctum Α. dico, ΔΕ intra superficiem esse, productam autem in directum extra.

ducantur ΑΕ, ΑΔ et producantur; cadent igitur ad ambitum circuli [prop. I]. cadant in Β, Γ, et ducatur ΒΓ; ΒΓ igitur intra circulum erit; quare etiam intra superficiem conicam. iam in ΔΕ sumatur punctum aliquod Ζ, et ducta ΑΖ producatur; cadet igitur τωσαν κατὰ τὰ Β, Γ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΓ· ἔσται ἄρα ἡ ΒΓ ἐντὸς τοῦ κύκλου· ὥστε καὶ τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ΔΕ τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΖ ἐκβεβλήσθω. πεσεῖται δὴ ἐπὶ τὴν ΒΓ εὐθεῖαν· τὸ γὰρ ΒΓΑ τρίγωνον ἐν ἑνί ἐστιν ἐπιπέδῳ. πιπτέτω κατὰ τὸ Η. ἐπεὶ οὖν τὸ Η ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ΑΗ ἄρα ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας· ὥστε καὶ τὸ Ζ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ πάντα τὰ ἐπὶ τῆς ΔΕ σημεῖα ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας· ἡ ἄρα ΔΕ ἐντός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὸ Θ. λέγω δή, ὅτι ἐκτὸς πεσεῖται τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τι αὐτῆς τὸ Θ μὴ ἐκτὸς τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΘ ἐκβεβλήσθω· πεσεῖται δὴ ἢ ἐπὶ τὴν περιφέρειαν τοῦ κύκλου ἢ ἐντός· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· πίπτει γὰρ ἐπὶ τὴν ΒΓ ἐκβαλλομένην ὡς κατὰ τὸ Κ. ἡ ΕΘ ἄρα ἐκτός ἐστι τῆς ἐπιφανείας.

ἡ ἄρα ΔΕ ἐντός ἐστι τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας, καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

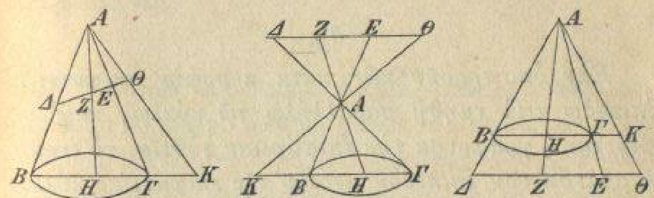
γ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ διὰ τοῦ Α σημείου, καὶ ποιείτω τομὰς ἐπὶ μὲν τῆς ἐπιφανείας τὰς ΑΒ, ΑΓ γραμμάς, ἐν δὲ τῇ βάσει τὴν ΒΓ εὐθεῖαν. λέγω, ὅτι τὸ ΑΒΓ τρίγωνόν ἐστιν.

1. ἄρα] cv; euan. V, rep. mg. m. rec. 16. περιφέφειαν V (in alt. φ inc. fol. 3ᵘ), corr. m. rec. ἀδύνατον] cv, -τον euan. V. 20. ἐκτός] ἐκτός :— V. 28. ΑΒΓ] p, ΑΓ V, corr. m. 2 v.

ad rectam ΒΓ; triangulus enim ΒΓΑ in uno plano positus est [Eucl. XI, 2]. cadat in Η. iam quoniam Η intra superficiem conicam est, etiam ΑΗ intra superficiem conicam est [prop. I coroll.]; quare etiam Ζ intra superficiem conicam est. similiter igitur demonstrabimus, etiam omnia puncta rectae ΔΕ intra superficiem esse; itaque ΔΕ intra superficiem est.



iam ΔΕ ad Θ producatur. dico, eam extra superficiem conicam cadere. nam si fieri potest, pars eius aliqua uelut Θ extra superficiem conicam ne sit, et ducta ΑΘ producatur. cadet igitur aut in ambitum circuli aut intra [prop. I et coroll.]; quod fieri non potest. cadit enim in ΒΓ productam ut in Κ. itaque ΕΘ extra superficiem est.

ergo ΔΕ intra superficiem conicam est, producta autem in directum extra.

III.

Si conus per uerticem plano secatur, sectio triangulus est.

sit conus, cuius uertex sit Α punctum, basis autem circulus ΒΓ, et secetur plano aliquo per Α punctum, et hoc sectiones efficiat in superficie lineas ΑΒ, ΑΓ, in basi autem rectam ΒΓ. dico, ΑΒΓ triangulum esse.

ἐπεὶ γὰρ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη κοινὴ τομή ἐστι τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ AB· ὁμοίως δὲ καὶ ἡ $A\Gamma$. ἔστι δὲ καὶ ἡ $B\Gamma$ εὐθεῖα. τρίγωνον ἄρα ἐστὶ τὸ $AB\Gamma$.

ἐὰν ἄρα κῶνος ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ διὰ τῆς κορυφῆς, ἡ τομὴ τρίγωνόν ἐστιν.

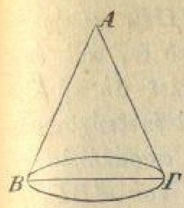
δ'.

Ἐὰν ὁποτεραοῦν τῶν κατὰ κορυφὴν ἐπιφανειῶν ἐπιπέδῳ τινὶ τμηθῇ παραλλήλῳ τῷ κύκλῳ, καθ' οὗ φέρεται ἡ γράφουσα τὴν ἐπιφάνειαν εὐθεῖα, τὸ ἐναπολαμβανόμενον ἐπίπεδον μεταξὺ τῆς ἐπιφανείας κύκλος ἔσται τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος, τὸ δὲ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου κωνικῆς ἐπιφανείας πρὸς τῇ κορυφῇ κῶνος ἔσται.

ἔστω κωνικὴ ἐπιφάνεια, ἧς κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, ὁ δὲ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ $B\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ παραλλήλῳ τῷ $B\Gamma$ κύκλῳ, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὴν τὴν ΔE γραμμήν. λέγω, ὅτι ἡ ΔE γραμμὴ κύκλος ἐστὶν ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἔχων τὸ κέντρον.

εἰλήφθω γὰρ τὸ κέντρον τοῦ $B\Gamma$ κύκλου τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AZ. ἄξων ἄρα ἐστὶ καὶ συμβάλλει τῷ τέμνοντι ἐπιπέδῳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ H, καὶ ἐκβεβλήσθω τι διὰ τῆς AZ ἐπίπεδον. ἔσται δὴ ἡ τομὴ τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, H, E σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ τοῦ

7. ἐστιν] ἐστί :— V.



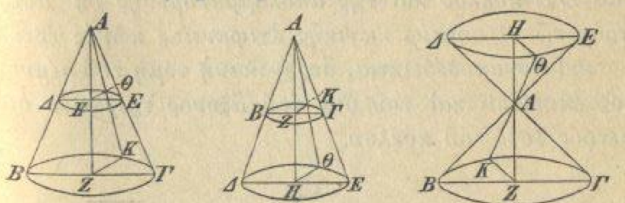
nam quoniam linea ab A ad B ducta communis est sectio plani secantis et superficiei conicae, recta est AB. et eadem de causa $A\Gamma$. uerum etiam $B\Gamma$ recta est. itaque $AB\Gamma$ triangulus est.

ergo si conus plano per uerticem secatur, sectio triangulus est.

IV.

Si utralibet superficies earum, quae ad uerticem sunt inter se, plano secatur aliquo ei circulo parallelo, per quem fertur recta superficiem describens, planum intra superficiem comprehensum circulus erit centrum in axe habens, figura autem a circulo et superficie conica plano secante abscisa ad uerticem comprehensa conus erit.

sit superficies conica, cuius uertex sit A punctum, circulus autem, per quem fertur recta superficiem



describens, $B\Gamma$, et secetur plano aliquo circulo $B\Gamma$ parallelo, et hoc in superficie sectionem efficiat lineam ΔE. dico, lineam ΔE circulum esse centrum in axe habentem.

sumatur enim Z centrum circuli $B\Gamma$, et ducatur AZ. axis igitur est [def. 1] et cum plano secante

ΑΒΓ ἐπιπέδῳ, εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔΗΕ*. εἰλήφθω δή τι σημεῖον ἐπὶ τῆς *ΔΕ* γραμμῆς τὸ *Θ*, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ *ΑΘ* ἐκβεβλήσθω. συμβαλεῖ δὴ τῇ *ΒΓ* περιφερείᾳ. συμβαλλέτω κατὰ τὸ *Κ*, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ *ΗΘ*, *ΖΚ*. καὶ ἐπεὶ δύο ἐπίπεδα παράλληλα τὰ *ΔΕ*, *ΒΓ* ὑπὸ ἐπιπέδου τινὸς τέμνεται τοῦ *ΑΒΓ*, αἱ κοιναὶ αὐτῶν τομαὶ παράλληλοί εἰσι· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔΕ* τῇ *ΒΓ*. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ *ΗΘ* τῇ *ΚΖ* παράλληλος. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ *ΖΑ* πρὸς τὴν *ΑΗ*, οὕτως ἥ τε *ΖΒ* πρὸς *ΔΗ* καὶ ἡ *ΖΓ* πρὸς *ΗΕ* καὶ ἡ *ΖΚ* πρὸς *ΗΘ*. καί εἰσιν αἱ τρεῖς αἱ *ΒΖ*, *ΚΖ*, *ΖΓ* ἴσαι ἀλλήλαις· καὶ αἱ τρεῖς ἄρα αἱ *ΔΗ*, *ΗΘ*, *ΗΕ* ἴσαι εἰσὶν ἀλλήλαις. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τοῦ *Η* σημείου πρὸς τὴν *ΔΕ* γραμμὴν προσπίπτουσαι εὐθεῖαι ἴσαι ἀλλήλαις εἰσί.

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΔΕ* γραμμὴ τὸ κέντρον ἔχων ἐπὶ τοῦ ἄξονος.

καὶ φανερόν, ὅτι τὸ περιεχόμενον σχῆμα ὑπό τε τοῦ *ΔΕ* κύκλου καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτοῦ πρὸς τῷ *Α* σημείῳ κωνικῆς ἐπιφανείας κῶνός ἐστι.

καὶ συναποδέδεικται, ὅτι ἡ κοινὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου διάμετρός ἐστι τοῦ κύκλου.

ε΄.

Ἐὰν κῶνος σκαληνὸς ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς μὲν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ πρὸς τῇ κορυφῇ τρίγωνον ὅμοιον μὲν τῷ διὰ τοῦ

6. τέμνεται τοῦ] bis (in extr. et pr. fol.) V, corr. m. 1. 11. αἱ] (alt.) p, om. V, corr. m. 2 v. 20. τῷ *Α* σημείῳ] sine causa rep. mg. m. rec. V.

concidit. concidat in *H*, et per *AZ* planum ducatur. sectio igitur *ΑΒΓ* triangulus erit [prop. III]. et quoniam puncta *Δ*, *H*, *E* in plano secanti sunt, uerum etiam in plano *ΑΒΓ*, *ΔHE* recta est [Eucl. XI, 3]. sumatur igitur in linea *ΔE* punctum aliquod *Θ*, et ducta *AΘ* producatur. concidet igitur cum ambitu *BΓ*. concidat in *K*, et ducantur *HΘ*, *ZK*. et quoniam duo plana parallela *ΔE*, *BΓ* plano *ABΓ* secantur, communes eorum sectiones parallelae sunt [Eucl. XI, 16]. itaque *ΔE* rectae *BΓ* parallela est. eadem de causa etiam *HΘ* rectae *KZ* parallela est. itaque [Eucl. VI, 4] $ZA : AH = ZB : \Delta H = Z\Gamma : HE = ZK : H\Theta$. et $BZ = KZ = Z\Gamma$. quare etiam $\Delta H = H\Theta = HE$ [Eucl. V, 9]. iam similiter demonstrabimus, etiam omnes rectas ab *H* puncto ad lineam *ΔE* adcidentes inter se aequales esse.

ergo linea *ΔE* circulus est centrum in axe habens.

et manifestum est, figuram circulo *ΔE* et superficie conica ab eo abscisa ad *A* punctum comprehensam conum esse.

et simul demonstratum est, sectionem communem plani secantis trianguli que per axem positi diametrum circuli esse.

V.

Si conus obliquus per axem plano ad basim perpendiculari secatur et simul alio plano secatur ad triangulum per axem positum perpendiculari, quod ad uerticem triangulum abscindat triangulo per axem posito similem, sed e contrario positum, sectio circulus erit; adpelletur autem talis sectio contraria.

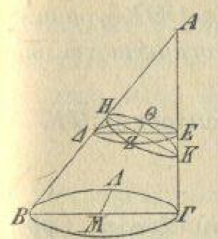
ἄξονος τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, ἡ τομὴ κύκλος ἐστί, καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπεναντία.

ἔστω κῶνος σκαληνός, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος ὀρθῷ πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. τετμήσθω δὴ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ πρὸς ὀρθὰς ὄντι τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ, ἀφαιροῦντι δὲ τρίγωνον πρὸς τῷ A σημείῳ τὶ AKH ὅμοιον μὲν τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ, ὑπεναντίως δὲ κείμενον, τουτέστιν ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ὑπὸ AKH γωνίαν τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν $H\Theta K$ γραμμήν. λέγω, ὅτι κύκλος ἐστὶν ἡ $H\Theta K$ γραμμή.

εἰλήφθω γάρ τινα σημεῖα ἐπὶ τῶν $H\Theta K$, $B\Gamma$ γραμμῶν τὰ Θ, Δ, καὶ ἀπὸ τῶν Θ, Δ σημείων ἐπὶ τὸ διὰ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἐπίπεδον κάθετοι ἤχθωσαν· πεσοῦνται δὴ ἐπὶ τὰς κοινὰς τομὰς τῶν ἐπιπέδων. πιπτέτωσαν ὡς αἱ $Z\Theta$, ΔM. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $Z\Theta$ τῇ ΔM. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Z τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ ΔZE· ἔστι δὲ καὶ ἡ $Z\Theta$ τῇ ΔM παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν $Z\Theta$, ΔE ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. κύκλος ἄρα ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΔE. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΔZ, ZE τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $E\Delta$ τῇ $B\Gamma$, ἡ ὑπὸ $A\Delta E$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$. ἡ δὲ ὑπὸ AKH τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ ὑπόκειται ἴση· καὶ ἡ ὑπὸ AKH ἄρα τῇ ὑπὸ $A\Delta E$ ἐστιν ἴση. εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τῷ Z σημείῳ ἴσαι [κατὰ κορυφήν]. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔZH τρίγωνον τῷ KZE τριγώνῳ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ EZ πρὸς τὴν ZK, οὕτως ἡ HZ πρὸς $Z\Delta$. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν

6. δή] δέ Eutocius. 8. AKH] p, KH V. 27. κατὰ κορυφήν] deleo; κατὰ κορυφὴν γάρ p, in ras. m. 2 v.

sit conus obliquus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, et per axem secetur plano ad circulum $B\Gamma$ perpendiculari, et hoc sectionem efficiat triangulum $AB\Gamma$ [prop. III]. iam etiam alio plano secetur ad triangulum $AB\Gamma$ perpendiculari, quod ad A punctum abscindat triangulum AKH similem triangulo $AB\Gamma$, sed e contrario positum, h. e. ita ut sit



$$\angle AKH = \angle AB\Gamma.$$

et in superficie efficiat sectionem lineam $H\Theta K$. dico, lineam $H\Theta K$ circulum esse.

sumantur enim in lineis $H\Theta K$, $B\Gamma$ puncta aliqua Θ, Δ, et a punctis Θ, Δ ad planum trianguli $AB\Gamma$ perpendiculares ducantur; cadent igitur ad communes sectiones planorum [Eucl. XI def. 6]. cadant ut $Z\Theta$, ΔM. itaque $Z\Theta$, ΔM parallelae sunt [Eucl. XI, 6]. ducatur igitur per Z rectae $B\Gamma$ parallela ΔZE. uerum etiam $Z\Theta$ rectae ΔM parallela est. itaque planum rectarum $Z\Theta$, ΔE basi coni parallelum est [Eucl. XI, 15]. quare circulus est, cuius diametrus est ΔE [prop. IV]. itaque est [Eucl. VI, 8] $\Delta Z \times ZE = Z\Theta^2$. et quoniam $E\Delta$, $B\Gamma$ parallelae sunt, erit $\angle A\Delta E = \angle AB\Gamma$ [Eucl. I, 29]. uerum supposuimus, esse $\angle AKH = \angle AB\Gamma$; quare etiam $\angle AKH = \angle A\Delta E$. uerum etiam anguli ad Z punctum positi aequales sunt [Eucl. I, 15]. itaque $\Delta ZH \sim KZE$. quare [Eucl. VI, 4]

$$EZ : ZK = HZ : Z\Delta.$$

itaque $EZ \times Z\Delta = KZ \times ZH$ [Eucl. VI, 17].

$EZ\varDelta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν KZH. ἀλλὰ τῷ ὑπὸ τῶν $EZ\varDelta$ ἴσον ἐδείχθη τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$· καὶ τὸ ὑπὸ τῶν KZ, ZH ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$. ὁμοίως δὴ δειχθήσονται καὶ πᾶσαι αἱ ἀπὸ τῆς $H\Theta K$ γραμμῆς ἐπὶ τὴν HK ἠγμέναι κάθετοι ἴσον δυνάμεναι τῷ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς HK.

κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ τομή, οὗ διάμετρος ἡ HK.

ς'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῇ παράλληλος εὐθείᾳ τινί, ἥ ἐστι κάθετος ἀπὸ τῆς περιφερείας τοῦ κύκλου ἐπὶ τὴν βάσιν τοῦ τριγώνου, συμβαλεῖ τῷ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω κοινὴν τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς $B\Gamma$ περιφερείας τοῦ M κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν $B\Gamma$ ἡ MN. εἰλήφθω δὴ ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου σημεῖόν τι τὸ $\varDelta$, καὶ διὰ τοῦ $\varDelta$ τῇ MN παράλληλος ἤχθω ἡ $\varDelta E$. λέγω, ὅτι ἡ $\varDelta E$ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῷ ἐπιπέδῳ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου καὶ προσεκβαλλομένη ἐπὶ τὸ ἕτερον μέρος τοῦ κώνου, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ ἐπιφανείᾳ αὐτοῦ, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ ἐπιπέδου τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου.

1. ἐστί — 2. ἴσον] om. V, corr. p (KZ, ZH et EZ, $Z\varDelta$). 2. $Z\Theta$] $E\Theta$ V; corr. p. 5. HK] p, $H\Gamma$ V, corr. m. 2 v. 12. εὐθείᾳ] rep. mg. m. rec. V. 14. σαμβαλεῖ V, sed corr.

demonstrauimus autem, esse $EZ \times Z\varDelta = Z\Theta^2$. quare etiam $KZ \times ZH = Z\Theta^2$.

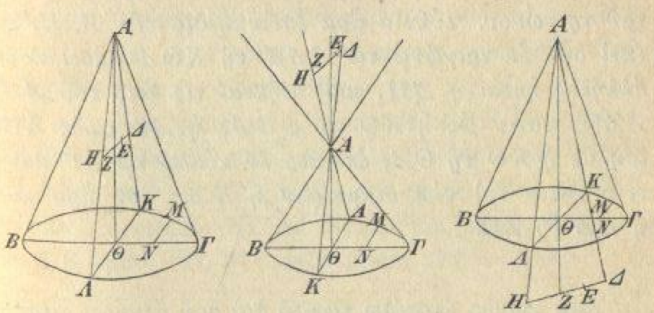
iam similiter demonstrabimus, etiam omnes rectas a linea $H\Theta K$ ad HK perpendiculares ductas quadratas aequales esse rectangulo partium rectae HK.

ergo sectio circulus est, cuius diametrus est HK.

VI.

Si conus plano per axem secatur, et in superficie coni punctum aliquod sumitur, quod in latere trianguli per axem positi non est, et ab eo recta ducitur parallela rectae ab ambitu circuli ad basim trianguli perpendiculari, ea cum triangulo per axem posito concurret et usque ad alteram partem superficiei producta a triangulo in duas partes aequales secabitur.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et secetur conus plano per axem, et hoc communem sectionem efficiat $AB\Gamma$ triangulum, et a



puncto M ambitus $B\Gamma$ ad $B\Gamma$ perpendicularis ducatur MN. iam in superficie coni punctum aliquod sumatur $\varDelta$, et per $\varDelta$ rectae MN parallela ducatur $\varDelta E$. dico, rectam $\varDelta E$ productam cum plano trianguli $AB\Gamma$

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται ἄρα τῇ περιφερείᾳ τοῦ ΒΓ κύκλου. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ ἐπὶ τὴν ΒΓ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΘ τῇ ΜΝ· καὶ τῇ ΔΕ ἄρα. ἐπεζεύχθω ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὸ Θ ἡ ΛΘ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΛΘΚ τῇ ΘΚ παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΛΘ. ἡ δὲ ΛΘ ἐν τῷ τοῦ ΑΒΓ ἐστιν ἐπιπέδῳ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΕ τῷ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου ἐπιπέδῳ. διὰ τὰ αὐτὰ καὶ τῇ ΛΘ συμπίπτει· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΖ ἐπ᾽ εὐθείας, ἄχρις ἂν συμπέσῃ τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.

ἐπεὶ γὰρ τὰ Λ, Η, Δ σημεῖα ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐστὶν ἐπιφανείᾳ, ἀλλὰ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΛΘ, ΛΚ, ΔΗ, ΚΛ ἐκβαλλομένῳ, ὅπερ διὰ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου τρίγωνόν ἐστι, τὰ Λ, Η, Δ ἄρα σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς ἐστι τομῆς τῆς τοῦ κώνου ἐπιφανείας καὶ τοῦ τριγώνου. εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ διὰ τῶν Λ, Η, Δ. ἐπεὶ οὖν ἐν τριγώνῳ τῷ ΛΛΚ τῇ ΚΘΛ βάσει παράλληλος ἦκται ἡ ΔΗ, καὶ διῆκταί τις ἀπὸ τοῦ Λ ἡ ΛΖΘ, ἔστιν ὡς ἡ ΚΘ πρὸς ΘΛ, ἡ ΔΖ πρὸς ΖΗ. ἴση δὲ ἡ ΚΘ τῇ ΘΛ, ἐπείπερ ἐν κύκλῳ τῷ ΒΓ κάθετός ἐστιν ἐπὶ τὴν διάμετρον ἡ ΚΛ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΔΖ τῇ ΖΗ.

ζ΄.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν

21. ἀπὸ τοῦ] cp, ἀποῦ V. 23. ἐν] ἐκ V; corr. p.

concurrere et ad alteram partem coni productam, donec cum superficie eius concurrat, a plano trianguli ΑΒΓ in duas partes aequales secari.

ducatur ΑΔ et producatur; concurret igitur cum ambitu circuli ΒΓ [prop. I]. concurrat in Κ, et a Κ ad ΒΓ perpendicularis ducatur ΚΘΛ; itaque ΚΘ rectae ΜΝ parallela est [Eucl. I, 28]; quare etiam rectae ΔΕ [Eucl. XI, 9]. ducatur ab Λ ad Θ recta ΛΘ. iam quoniam in triangulo ΛΘΚ rectae ΘΚ parallela est ΔΕ, ΔΕ producta cum ΛΘ concurret [Eucl. VI, 2]. uerum ΛΘ in plano trianguli ΑΒΓ posita est. itaque ΔΕ cum plano trianguli ΑΒΓ concurret.

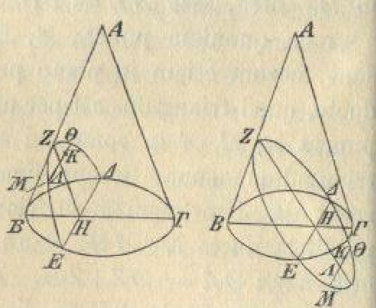
simul demonstrauimus, eam etiam cum ΛΘ concurrere. concurrat in Ζ, et ΔΖ in directum producatur, donec cum superficie coni concurrat. concurrat in Η. dico, esse ΔΖ = ΖΗ.

nam quoniam puncta Λ, Η, Δ in superficie coni sunt, uerum etiam in plano per ΛΘ, ΛΚ, ΔΗ, ΚΛ ducto, quod triangulus est per uerticem coni [prop. III], puncta Λ, Η, Δ in communi sectione superficiei coni triangulique sunt. itaque linea per Λ, Η, Δ ducta recta est. iam quoniam in triangulo ΛΛΚ basi ΚΘΛ parallela ducta est ΔΗ, et ab Λ producta est ΛΖΘ, erit ΚΘ : ΘΛ = ΔΖ : ΖΗ. est autem ΚΘ = ΘΛ, quoniam in circulo ΒΓ ad diametrum perpendicularis est ΚΛ [Eucl. III, 3]. ergo etiam ΔΖ = ΖΗ.

VII.

Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod id planum, in quo est basis coni, secundum rectam secat aut ad basim trianguli per ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, αἱ ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἀπὸ τῆς γενηθείσης τομῆς ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ, ἣν ἐποίησε τὸ τέμνον ἐπίπεδον, παράλληλοι τῇ πρὸς ὀρθὰς τῇ βάσει τοῦ τριγώνου εὐθείᾳ ἐπὶ τὴν κοινὴν τομὴν πεσοῦνται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου καὶ προσεκβαλλόμεναι ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσονται ὑπ' αὐτῆς, καὶ ἐὰν μὲν ὀρθὸς ᾖ ὁ κῶνος, ἡ ἐν τῇ βάσει εὐθεῖα πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἐὰν δὲ σκαληνός, οὐκ αἰεὶ πρὸς ὀρθὰς ἔσται, ἀλλ' ὅταν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον πρὸς ὀρθὰς ᾖ τῇ βάσει τοῦ κώνου.

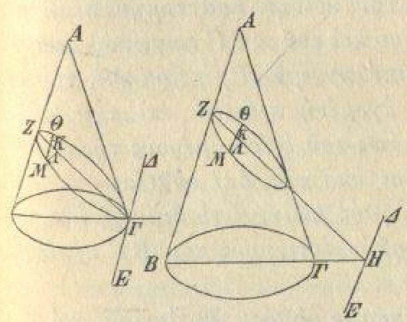
ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ὁ $B\Gamma$ κύκλος, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔE ἤτοι πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ $B\Gamma$ ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔZE· κοινὴ δὴ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου ἡ ZH. καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔZE



1. τοῦ] τῇ V; corr. p. 22. ἤτοι] ἤτ V, ἤτοι mg. m. rec. 27. δή] scripsi; δέ V.

axem positi aut ad eandem productam perpendicularem, rectae a sectione in superficie coni orta, quam planum secans effecit, parallelae ductae rectae ad basim trianguli perpendiculari cadent in communem sectionem plani secantis trianguli que per axem positi et ad alteram partem sectionis productae in binas partes aequales ab ea secabuntur, et si conus rectus est, recta in basi posita perpendicularis erit ad communem sectionem plani secantis trianguli que per axem positi, sin obliquus est, non semper perpendicularis erit, sed ita tantum, si planum per axem ductum ad basim coni perpendiculare est.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et plano per axem secetur, et hoc sectionem faciat triangulum $AB\Gamma$. secetur autem etiam alio plano, quod planum, in quo est circulus $B\Gamma$, secundum rectam ΔE secat aut ad $B\Gamma$ aut ad eandem productam perpendicularem, et hoc in superficie coni sectionem efficiat ΔZE; communis igitur sectio plani secantis trianguli que $AB\Gamma$ est ZH. et sumatur in sectione ΔZE punctum aliquod Θ, ducaturque per Θ rectae ΔE parallela ΘK. dico, ΘK cum recta ZH concurrere et ad alteram partem sectionis ΔZE productam a recta ZH in duas partes aequales secari.



τομῆς τὸ Θ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἡ ΘΚ συμβαλεῖ τῇ ΖΗ καὶ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, εἴληπται δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας, ὃ μή ἐστιν ἐπὶ πλευρᾶς τοῦ ΑΒΓ τριγώνου, τὸ Θ, καί ἐστι κάθετος ἡ ΔΗ ἐπὶ τὴν ΒΓ, ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΗ παράλληλος ἀγομένη, τουτέστιν ἡ ΘΚ, συμβαλεῖ τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ἐπιφανείας δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τοῦ τριγώνου. ἐπεὶ οὖν ἡ διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη συμβάλλει τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ καί ἐστιν ἐν τῷ διὰ τῆς ΔΖΕ τομῆς ἐπιπέδῳ, ἐπὶ τὴν κοινὴν ἄρα τομὴν πεσεῖται τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΑΒΓ τριγώνου. κοινὴ δὲ τομή ἐστι τῶν ἐπιπέδων ἡ ΖΗ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Θ τῇ ΔΕ παράλληλος ἀγομένη πεσεῖται ἐπὶ τὴν ΖΗ· καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς ΔΖΕ τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΖΗ εὐθείας.

ἤτοι δὴ ὁ κῶνος ὀρθός ἐστιν, ἢ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ ΑΒΓ ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον, ἢ οὐδέτερον.

ἔστω πρότερον ὁ κῶνος ὀρθός· εἴη ἂν οὖν καὶ τὸ ΑΒΓ τρίγωνον ὀρθὸν πρὸς τὸν ΒΓ κύκλον. ἐπεὶ οὖν ἐπίπεδον τὸ ΑΒΓ πρὸς ἐπίπεδον τὸ ΒΓ ὀρθόν ἐστι, καὶ τῇ κοινῇ αὐτῶν τομῇ τῇ ΒΓ ἐν ἑνὶ τῶν ἐπιπέδων τῷ ΒΓ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΔΕ, ἡ ΔΕ ἄρα τῷ ΑΒΓ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ ΑΒΓ

nam quoniam conus, cuius uertex est Α punctum, basis autem circulus ΒΓ, plano per axem secatur, et hoc sectionem efficit triangulum ΑΒΓ, in superficie autem sumptum est punctum Θ, quod in latere trianguli ΑΒΓ non est, et ΔΗ ad ΒΓ perpendicularis est, recta per Θ rectae ΔΗ parallela ducta, hoc est ΘΚ, cum triangulo ΑΒΓ concurret et ad alteram partem superficiei producta a triangulo in duas partes aequales secabitur [prop. VI]. iam quoniam recta per Θ rectae ΔΕ parallela ducta cum triangulo ΑΒΓ concurrit et in plano sectionis ΔΖΕ est, in communem sectionem plani secantis triangulique ΑΒΓ cadet. communis autem planorum sectio est ΖΗ; itaque recta per Θ rectae ΔΕ parallela ducta in ΖΗ cadet; et ad alteram partem sectionis ΔΖΕ producta a recta ΖΗ in duas partes aequales secabitur.

iam igitur aut rectus est conus, aut triangulus ΑΒΓ per axem positus ad circulum ΒΓ perpendicularis est, aut neutrum.

prius conus rectus sit. itaque etiam triangulus ΑΒΓ ad circulum ΒΓ perpendicularis est [def. 3; Eucl. XI, 18]. quoniam igitur planum ΑΒΓ ad planum ΒΓ perpendiculare est, et in plano altero ΒΓ ad communem eorum sectionem ΒΓ perpendicularis ducta est ΔΕ, ΔΕ ad triangulum ΑΒΓ perpendicularis est [Eucl. XI def. 4]. quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in triangulo ΑΒΓ positas perpendicularis est [Eucl. XI def. 3]. ergo etiam ad ΖΗ perpendicularis est.

τριγώνῳ ὀρθή ἐστιν. ὥστε καὶ πρὸς τὴν ZH ἐστι πρὸς ὀρθάς.

μὴ ἔστω δὴ ὁ κῶνος ὀρθός. εἰ μὲν οὖν τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον ὀρθόν ἐστι πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον, ὁμοίως δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΔE τῇ ZH ἐστι πρὸς ὀρθάς. μὴ ἔστω δὴ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος τρίγωνον τὸ $AB\Gamma$ ὀρθὸν πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον. λέγω, ὅτι οὐδὲ ἡ ΔE τῇ ZH ἐστι πρὸς ὀρθάς. εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω· ἔστι δὲ καὶ τῇ $B\Gamma$ πρὸς ὀρθάς· ἡ ἄρα ΔE ἑκατέρᾳ τῶν $B\Gamma$, ZH ἐστι πρὸς ὀρθάς. καὶ τῷ διὰ τῶν $B\Gamma$, ZH ἐπιπέδῳ ἄρα πρὸς ὀρθὰς ἔσται. τὸ δὲ διὰ τῶν $B\Gamma$, HZ ἐπίπεδόν ἐστι τὸ $AB\Gamma$· καὶ ἡ ΔE ἄρα τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. καὶ πάντα ἄρα τὰ δι' αὐτῆς ἐπίπεδα τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ ἐστὶ πρὸς ὀρθάς. ἓν δέ τι τῶν διὰ τῆς ΔE ἐπιπέδων ἐστὶν ὁ $B\Gamma$ κύκλος· ὁ $B\Gamma$ ἄρα κύκλος πρὸς ὀρθάς ἐστι τῷ $AB\Gamma$ τριγώνῳ. ὥστε καὶ τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον ὀρθὸν ἔσται πρὸς τὸν $B\Gamma$ κύκλον· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα ἡ ΔE τῇ ZH ἐστι πρὸς ὀρθάς.

πόρισμα.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι τῆς ΔZE τομῆς διάμετρός ἐστιν ἡ ZH, ἐπείπερ τὰς ἀγομένας παραλλήλους εὐθείᾳ τινὶ τῇ ΔE δίχα τέμνει, καὶ ὅτι δυνατόν ἐστιν ὑπὸ τῆς διαμέτρου τῆς ZH παραλλήλους τινὰς δίχα τέμνεσθαι καὶ μὴ πρὸς ὀρθάς.

η'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ δια τοῖ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου

1. ὥστε] ὥσ' V. 3. τό] bis V in extr. et init. pag.; corr. cvp. 16. ὥστε] ὥσ' V, ὥστε mg. m. rec. 20. πόρισμα] p, om. V.

ne sit igitur rectus conus. iam si triangulus per axem positus ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis est, eodem modo demonstrabimus, etiam ΔE ad ZH perpendicularem esse. ne sit igitur triangulus per axem positus $AB\Gamma$ ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis. dico, ne ΔE quidem ad ZH perpendicularem esse. nam si fieri potest, sit. uerum etiam ad $B\Gamma$ perpendicularis est. ΔE igitur ad utramque $B\Gamma$, ZH perpendicularis est; quare etiam ad planum per $B\Gamma$, ZH ductum perpendicularis erit [Eucl. XI, 4]. planum autem rectarum $B\Gamma$, HZ est $AB\Gamma$; quare ΔE etiam ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularis est. itaque etiam omnia plana per eam ducta ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularia sunt [Eucl. XI, 18]. uerum inter plana per ΔE ducta est circulus $B\Gamma$; quare circulus $B\Gamma$ ad triangulum $AB\Gamma$ perpendicularis est. itaque etiam triangulus $AB\Gamma$ ad circulum $B\Gamma$ perpendicularis erit; quod contra hypothesim est. ergo ΔE ad ZH perpendicularis non est.

Corollarium.

hinc manifestum est, ZH diametrum esse sectionis ΔZE [def. 4], quoniam rectas rectae alicui ΔE parallelas ductas in binas partes aequales secat, et fieri posse, ut parallelae a diametro ZH in binas partes aequales secentur, etiam si ad angulos rectos non fiat.

VIII.

Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod basim coni secundum rectam secat ad basim trianguli per axem positi perpendicularem, κατ᾽ εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἡ δὲ διάμετρος τῆς γινομένης ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομῆς ἤτοι παρὰ μίαν ᾖ τῶν τοῦ τριγώνου πλευρῶν ἢ συμπίπτῃ αὐτῇ ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, προσεκβάλληται δὲ ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται, καὶ ἀπὸ τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς πρὸς τῇ κορυφῇ πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις εὐθεῖα ἀγομένη ἀπὸ τῆς τοῦ κώνου τομῆς παρὰ τὴν ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθεῖαν.

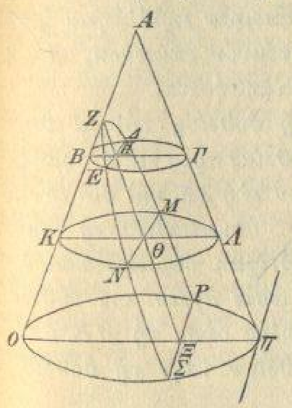
ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον· τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὸν $B\Gamma$ κύκλον κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔE πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ $B\Gamma$, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν $\Delta Z E$ γραμμήν· ἡ δὲ διάμετρος τῆς $\Delta Z E$ τομῆς ἡ ZH ἤτοι παράλληλος ἔστω τῇ $A\Gamma$ ἢ ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ A σημείου. λέγω, ὅτι καί, ἐὰν ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον ἐκβάλληται εἰς ἄπειρον, καὶ ἡ $\Delta Z E$ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.

ἐκβεβλήσθω γὰρ ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον· φανερὸν δή, ὅτι καὶ αἱ AB, $A\Gamma$, ZH συνεκβληθήσονται. ἐπεὶ ἡ ZH τῇ $A\Gamma$ ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ ἐκβαλλομένη συμπίπτει αὐτῇ ἐκτὸς τοῦ A σημείου, αἱ ZH, $A\Gamma$ ἄρα ἐκβαλλόμεναι ὡς ἐπὶ τὰ Γ, H μέρη οὐδέποτε συμπεσοῦνται. ἐκβεβλήσθωσαν οὖν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ZH τυχὸν τὸ Θ, καὶ διὰ

4. συμπίπτῃ] p; συμπίπτει V. 5. προσεκβάλληται] scripsi; προσεκβαλῆται V. 20. ἐκβαλῆται V, corr. Halley. 28. τῆς] cp; τῇ V.

diametrus autem sectionis in superficie ortae aut lateri alicui trianguli parallela est, aut extra uerticem coni cum eo concurrit, producitur autem in infinitum et superficies coni et planum secans, etiam sectio in infinitum crescet, et recta a sectione coni rectae in basi coni positae parallela ducta a diametro sectionis ad uerticem rectam cuilibet rectae datae aequalem abscindet.

sit conus, cuius uertex sit punctum A, basis autem circulus $B\Gamma$, et plano per axem secetur, quod sectionem efficiat triangulum $AB\Gamma$; secetur autem etiam alio plano, quod circulum $B\Gamma$ secundum rectam ΔE secet ad $B\Gamma$ perpendicularem et in superficie coni sectionem efficiat lineam $\Delta Z E$. diametrus autem ZH sectionis $\Delta Z E$ aut rectae $A\Gamma$ parallela sit aut producta cum ea extra punctum A concurrat. dico, si et superficies coni et planum secans in infinitum producantur, etiam sectionem $\Delta Z E$ in infinitum crescere.



producatur enim et superficies coni et planum secans. manifestum igitur est, etiam rectas AB, $A\Gamma$, ZH simul produci. iam quoniam ZH aut rectae $A\Gamma$ parallela est aut producta cum ea extra punctum A concurrit, rectae ZH, $A\Gamma$ productae ad partes Γ, H uersus nunquam concurrent. producantur igitur, et in ZH punctum aliquod sumatur Θ, et per Θ punctum rectae τοῦ Θ σημείου τῇ μὲν ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΘΛ, τῇ δὲ ΔΕ παράλληλος ἡ ΜΘΝ· τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ. κύκλος ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΜΝ ἐπίπεδον. καὶ ἐπεὶ τὰ Δ, Ε, Μ, Ν σημεῖα ἐν τῷ τέμνοντί ἐστιν ἐπιπέδῳ, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου, ἐπὶ τῆς κοινῆς ἄρα τομῆς ἐστιν· ηὔξηται ἄρα ἡ ΔΖΕ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. αὐξηθείσης ἄρα τῆς ἐπιφανείας τοῦ κώνου καὶ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου μέχρι τοῦ ΚΛΜΝ κύκλου ηὔξηται καὶ ἡ ΔΖΕ τομὴ μέχρι τῶν Μ, Ν σημείων. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καί, ἐὰν εἰς ἄπειρον ἐκβάλληται ἥ τε τοῦ κώνου ἐπιφάνεια καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον, καὶ ἡ ΜΔΖΕΝ τομὴ εἰς ἄπειρον αὐξηθήσεται.

καὶ φανερόν, ὅτι πάσῃ τῇ δοθείσῃ εὐθείᾳ ἴσην ἀπολήψεταί τις ἀπὸ τῆς ΖΘ εὐθείας πρὸς τῷ Ζ σημείῳ. ἐὰν γὰρ τῇ δοθείσῃ ἴσην θῶμεν τὴν ΖΞ καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔΕ παράλληλον ἀγάγωμεν, συμπεσεῖται τῇ τομῇ, ὥσπερ καὶ ἡ διὰ τοῦ Θ ἀπεδείχθη συμπίπτουσα τῇ τομῇ κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα· ὥστε ἄγεταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ τομῇ παράλληλος οὖσα τῇ ΔΕ ἀπολαμβάνουσα ἀπὸ τῆς ΖΗ εὐθεῖαν ἴσην τῇ δοθείσῃ πρὸς τῷ Ζ σημείῳ.

θ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν ἠγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, ἡ τομὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ τινὶ μήτε

2. ΜΘΝ] p, ΘΜΝ V. 6. τομῆς] cp, τομῇ V.

ΒΓ parallela ducatur ΚΘΛ, rectae autem ΔΕ parallela ΜΘΝ; itaque planum rectarum ΚΛ, ΜΝ plano rectarum ΒΓ, ΔΕ parallelum est [Eucl. XI, 15]. itaque planum ΚΛΜΝ circulus est [prop. IV]. et quoniam puncta Δ, Ε, Μ, Ν in plano secanti sunt, uerum etiam in superficie coni, in communi sectione sunt; quare ΔΖΕ ad puncta Μ, Ν creuit. itaque crescente superficie coni planoque secanti ad circulum ΚΛΜΝ etiam sectio ΔΖΕ ad puncta Μ, Ν creuit. similiter igitur demonstrabimus, si et superficies coni et planum secans in infinitum producantur, etiam sectionem ΜΔΖΕΝ in infinitum crescere.

et manifestum est, rectam quandam a ΖΘ recta ad Ζ punctum rectam cuiuis datae rectae aequalem abscisuram esse. nam si ΖΞ rectae datae aequalem ponimus et per Ξ rectae ΔΕ parallelam ducimus, cum sectione concurret, sicut etiam rectam per Θ ductam cum sectione in punctis Μ, Ν concurrere demonstrauimus. ergo recta quaedam cum sectione concurrens rectae ΔΕ parallela ducitur, quae a ΖΗ ad punctum Ζ rectam datae aequalem abscindat.

IX.

Si conus plano secatur cum utroque latere trianguli per axem positi concurrenti, sed neque basi parallelo neque e contrario ducto, sectio circulus non erit.

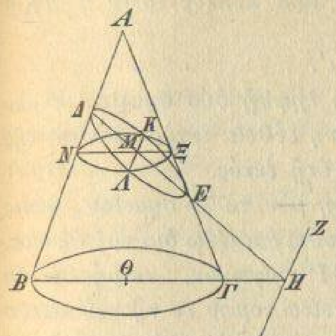
sit conus, cuius uertex sit Α punctum, basis autem circulus ΒΓ, et secetur plano neque basi parallelo neque e contrario posito, quod in superficie sectionem efficiat lineam ΔΚΕ. dico, lineam ΔΚΕ circulum non esse.

παραλλήλῳ ὄντι τῇ βάσει μήτε ὑπεναντίως, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΚΕ γραμμήν. λέγω, ὅτι ἡ ΔΚΕ γραμμὴ οὐκ ἔσται κύκλος.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω, καὶ συμπιπτέτω τὸ τέμνον ἐπίπεδον τῇ βάσει, καὶ ἔστω τῶν ἐπιπέδων κοινὴ τομὴ ἡ ΖΗ, τὸ δὲ κέντρον τοῦ ΒΓ κύκλου ἔστω τὸ Θ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἤχθω ἐπὶ τὴν ΖΗ ἡ ΘΗ, καὶ ἐκβεβλήσθω διὰ τῆς ΗΘ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον καὶ ποιείτω τομὰς ἐν τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑ, ΑΓ εὐθείας. ἐπεὶ οὖν τὰ Δ, Ε, Η σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τῆς ΔΚΕ ἐπιπέδῳ ἐστίν, ἔστι δὲ καὶ ἐν τῷ διὰ τῶν Α, Β, Γ, τὰ ἄρα Δ, Ε, Η σημεῖα ἐπὶ τῆς κοινῆς τομῆς τῶν ἐπιπέδων ἐστίν· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΗΕΔ. εἰλήφθω δή τι ἐπὶ τῆς ΔΚΕ γραμμῆς σημεῖον τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΚΛ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΚΜ τῇ ΜΛ. ἡ ἄρα ΔΕ διάμετρός ἐστι τοῦ ΔΚΛΕ κύκλου. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἡ ΝΜΞ· ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΛ τῇ ΖΗ παράλληλος· ὥστε τὸ διὰ τῶν ΝΞ, ΚΜ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΖΗ, τουτέστι τῇ βάσει, καὶ ἔσται ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ ΝΚΞ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΖΗ τῇ ΒΗ πρὸς ὀρθάς ἐστι, καὶ ἡ ΚΜ τῇ ΝΞ πρὸς ὀρθάς ἐστιν· ὥστε τὸ ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ. ἔστι δὲ τὸ ὑπὸ τῶν ΔΜΕ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΚΜ· κύκλος γὰρ ὑπόκειται ἡ ΔΚΕΛ γραμμή, καὶ διάμετρος αὐτοῦ ἡ ΔΕ. τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΝΜΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔΜΕ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΜΝ πρὸς ΜΔ, οὕτως ἡ ΕΜ πρὸς ΜΞ. ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΔΜΝ τρίγωνον τῷ ΞΜΕ τριγώνῳ, καὶ ἡ ὑπὸ ΔΝΜ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΜΕΞ.

16. ΔΚΛΕ] ΔΚΕΛ p. 20. ΒΓ] p, corr. ex Β m. 2 V. 21. ὁ] cp; om. V. 23. ἐστί] c, ἐστίν V.

nam si fieri potest, sit, et planum secans cum basi concurrat, communisque planorum sectio sit ΖΗ, centrum autem circuli ΒΓ sit Θ, et ab eo ad ΖΗ perpendicularis ducatur ΘΗ, et per ΗΘ axemque planum ducatur, quod in superficie conica sectiones efficiat rectas ΒΑ, ΑΓ. iam quoniam puncta Δ, Ε, Η et in plano per ΔΚΕ et in plano per Α, Β, Γ sunt, puncta Δ, Ε, Η in communi planorum sectione sunt; quare ΗΕΔ recta est [Eucl. XI, 3]. sumatur igitur in linea ΔΚΕ punctum aliquod Κ, et per Κ rectae ΖΗ parallela ducatur ΚΛ; erit igitur [prop. VII] $KM = MΛ$. itaque ΔΕ diametrus est circuli ΔΚΕΛ [prop. VII coroll.]. iam igitur per Μ rectae ΒΓ parallela ducatur ΝΜΞ. uerum etiam ΚΛ rectae ΖΗ parallela est; quare planum rectarum ΝΞ, ΚΜ plano rectarum ΒΓ, ΖΗ parallelum est, hoc est basi [Eucl. XI, 15], et sectio circulus erit [prop. IV]. sit ΝΚΞ. et quoniam ΖΗ ad ΒΗ perpendicularis est, etiam ΚΜ ad ΝΞ perpendicularis est [Eucl. XI, 10]; quare $NM \times MΞ = KM^2$. uerum $ΔM \times ME = KM^2$; supposuimus enim, lineam ΔΚΕΛ circulum esse et ΔΕ eius diametrum. itaque $NM \times MΞ = ΔM \times ME$. quare $MN : MΔ = EM : MΞ$. itaque $\triangle ΔMN \sim \triangle ΞME$ et $\angle ΔNM = \angle MEΞ$. est autem $\angle ΔNM = \angle ABΓ$; nam ΝΞ rectae ΒΓ parallela est. quare etiam



ἀλλὰ ἡ ὑπὸ $\varDelta NM$ γωνία τῇ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἐστιν ἴση· παράλληλος γὰρ ἡ $N\Xi$ τῇ $B\Gamma$· καὶ ἡ ὑπὸ $AB\Gamma$ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ME\Xi$. ὑπεναντία ἄρα ἐστὶν ἡ τομή· ὅπερ οὐχ ὑπόκειται. οὐκ ἄρα κύκλος ἐστὶν ἡ $\varDelta KE$ γραμμή.

ι'.

Ἐὰν ἐπὶ κώνου τομῆς ληφθῇ δύο σημεῖα, ἡ μὲν ἐπὶ τὰ σημεῖα ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον. τετμήσθω δὴ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ τοῦ κώνου ἐπιφανείᾳ τὴν $\varDelta EZ$ γραμμήν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $\varDelta EZ$ δύο σημεῖα τὰ H, Θ. λέγω, ὅτι ἡ μὲν ἐπὶ τὰ H, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς $\varDelta EZ$ γραμμῆς, ἡ δὲ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός.

ἐπεὶ γὰρ κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, εἴληπται δέ τινα σημεῖα ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας αὐτοῦ τὰ H, Θ, ἃ μή ἐστιν ἐπὶ τῆς πλευρᾶς τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα μὴ νεύῃ ἐπὶ τὸ A, ἡ ἄρα ἐπὶ τὰ H, Θ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τοῦ κώνου καὶ ἡ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ ἐκτός· ὥστε καὶ τῆς $\varDelta ZE$ τομῆς.

ια'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου

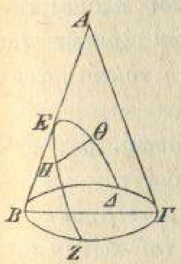
15. τά] (pr.) cp, corr. ex τῇ m. 2 V. 16. $\varDelta EZ$] p, $\varDelta Z$ V. 22. τριγώνου] τοῦ τριγώνου V; corr. p. 23. μή] c, supra scr. m. 2 V, οὐ p.

$\angle AB\Gamma = \angle ME\Xi$. itaque sectio e contrario est [prop. V]; quod contra hypothesim est. ergo linea $\varDelta KE$ circulus non est.

X.

Si in sectione coni duo puncta sumuntur, recta ad puncta ducta intra sectionem cadit, in directum autem producta extra.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, et per axem plano secetur, quod sectionem efficiat $AB\Gamma$ triangulum. iam alio quoque plano secetur, quod in superficie coni sectionem efficiat lineam $\varDelta EZ$, et in $\varDelta EZ$ duo puncta sumantur H, Θ. dico, rectam ad H, Θ ductam intra lineam $\varDelta EZ$ cadere, in directum autem productam extra.



nam quoniam conus, cuius uertex est A punctum, basis autem circulus $B\Gamma$, plano per axem sectus est, et in superficie eius sumpta sunt puncta quaedam H, Θ, quae in latere trianguli per axem positi non sunt, et recta ab H ad Θ ducta ad A non cadit, recta ad H, Θ ducta intra conum cadet, in directum autem producta extra [prop. II]. ergo etiam intra sectionem $\varDelta ZE$, producta autem extra eam.

XI.

Si conus per axem plano secatur et alio quoque plano secatur, quod basim coni secundum rectam ad κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἔτι δὲ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς παράλληλος ᾖ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου μέχρι τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἄλλης τινὸς εὐθείας, ἣ λόγον ἔχει πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τοῦ κώνου γωνίας καὶ τῆς κορυφῆς τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς βάσεως τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν λοιπῶν τοῦ τριγώνου δύο πλευρῶν· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ παραβολή.

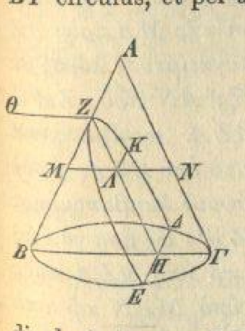
ἔστω κῶνος, οὗ τὸ A σημεῖον κορυφή, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔE πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ $B\Gamma$, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔZE, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ZH παράλληλος ἔστω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου τῇ $A\Gamma$, καὶ ἀπὸ τοῦ Z σημείου τῇ ZH εὐθείᾳ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $Z\Theta$, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ $B\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ $BA\Gamma$, οὕτως ἡ $Z\Theta$ πρὸς $Z\Lambda$, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ K, καὶ διὰ τοῦ K τῇ ΔE παράλληλος ἡ $K\Lambda$. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς $K\Lambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν $\Theta Z\Lambda$.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Λ τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ MN· ἔστι δὲ καὶ ἡ $K\Lambda$ τῇ ΔE παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ

14. Mg. m. rec. ..... ολ' ... V. 24. πεποιήσθω] cp; πεποιείσθω V, corr. m. 2.

basim trianguli per axem positi perpendicularem secat, et si praeterea diametrus sectionis lateri alterutri trianguli per axem positi parallela est, quaelibet recta, quae a sectione coni parallela ducitur communi sectioni plani secantis basisque coni, usque ad diametrum sumpta quadrata aequalis erit rectangulo comprehenso recta ex diametro ab ea ad uerticem abscisa sectionis aliaque quadam recta, quae ad rectam inter angulum coni uerticemque sectionis positam rationem habet, quam quadratum basis trianguli per axem positi ad rectangulum reliquis duobus lateribus trianguli comprehensum; uocetur autem talis sectio parabola.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et per axem plano secetur, quod sectionem efficiat triangulum $AB\Gamma$, secetur autem alio quoque plano, quod basim coni secundum rectam ΔE secat ad $B\Gamma$ perpendicularem et in superficie coni sectionem efficit ΔZE, diametrus autem sectionis ZH parallela sit $A\Gamma$ lateri trianguli per axem positi, et a puncto Z ad rectam ZH perpendicularis ducatur $Z\Theta$, et fiat $B\Gamma^2 : BA \times A\Gamma = Z\Theta : Z\Lambda$, et in sectione punctum quodlibet K sumatur, et per K rectae ΔE parallela ducatur $K\Lambda$. dico, esse



$$K\Lambda^2 = \Theta Z \times Z\Lambda.$$

ducatur enim per Λ rectae $B\Gamma$ parallela MN. uerum etiam $K\Lambda$ rectae ΔE parallela est. itaque planum rectaτῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΒΓ, ΔΕ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. τὸ ἄρα διὰ τῶν ΚΛ, ΜΝ ἐπίπεδον κύκλος ἐστίν, οὗ διάμετρος ἡ ΜΝ. καὶ ἔστι κάθετος ἐπὶ τὴν ΜΝ ἡ ΚΛ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΔΕ ἐπὶ τὴν ΒΓ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, οὕτως ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΓΑ καὶ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΓ πρὸς ΓΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΝΑ, τουτέστιν ἡ ΜΛ πρὸς ΛΖ, ὡς δὲ ἡ ΒΓ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΑ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΖ, καὶ λοιπὴ ἡ ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ ἄρα τῆς ΘΖ πρὸς ΖΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΝΛ πρὸς ΖΑ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΜΛ πρὸς ΛΖ καὶ τοῦ τῆς ΛΝ πρὸς ΖΑ ὁ τοῦ ὑπὸ ΜΛΝ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς ἄρα ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ὡς δὲ ἡ ΘΖ πρὸς ΖΑ, τῆς ΖΛ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΛΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΖΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΖΑ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΜΛΝ τῷ ὑπὸ ΘΖΛ. τὸ δὲ ὑπὸ ΜΛΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΚΛ· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΚΛ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΘΖΛ.

---

1. παράλληλον — 3. ἐπίπεδον] bis V (in repetitione τῷ διά lin. 1 bis), corr. m. 2. 13. ΝΑ] cvp et e corr. (et m. 2 et m. rec.) V. 14. ΜΑ] p, Μ corr. ex Ν m. 2 V. 15. ἡ] cp, m. 2 V. 18. τοῦ] (alt.) om. V, corr. Halley. 23. οὕτως — 24. ΛΖΑ] om. V, corr. Memus. 25. ΘΖΛ] ΘΛΖ V, corr. p (τῶν ΘΖ, ΖΛ).

rum $K\Lambda, MN$ plano rectarum $B\Gamma, \Delta E$ parallelum est [Eucl. XI, 15], hoc est basi coni. quare planum rectarum $K\Lambda, MN$ circulus est, cuius diametrus est MN [prop. IV]. et $K\Lambda$ ad MN perpendicularis est, quia etiam ΔE ad $B\Gamma$ perpendicularis [Eucl. XI, 10]; quare $M\Lambda \times \Lambda N = K\Lambda^2$. et quoniam est

$$B\Gamma^2 : BA \times A\Gamma = \Theta Z : ZA,$$

et est

$$B\Gamma^2 : BA \times A\Gamma = (B\Gamma : \Gamma A) \times (B\Gamma : BA),$$

erit

$$\Theta Z : ZA = (B\Gamma : \Gamma A) \times (\Gamma B : BA).$$

uerum

$$B\Gamma : \Gamma A = MN : NA = M\Lambda : \Lambda Z \text{ [Eucl. VI, 4]}$$

et

$$B\Gamma : BA = MN : MA = \Lambda M : MZ \text{ [ib.]} = N\Lambda : ZA$$

[Eucl. VI, 2]. quare

$$\Theta Z : ZA = (M\Lambda : \Lambda Z) \times (N\Lambda : ZA).$$

est autem

$$(M\Lambda : \Lambda Z) \times (\Lambda N : ZA) = M\Lambda \times \Lambda N : \Lambda Z \times ZA.$$

quare

$$\Theta Z : ZA = M\Lambda \times \Lambda N : \Lambda Z \times ZA.$$

est autem $Z\Lambda$ communi altitudine sumpta

$$\Theta Z : ZA = \Theta Z \times Z\Lambda : \Lambda Z \times ZA.$$

itaque

$$M\Lambda \times \Lambda N : \Lambda Z \times ZA = \Theta Z \times Z\Lambda : \Lambda Z \times ZA.$$

itaque

$$M\Lambda \times \Lambda N = \Theta Z \times Z\Lambda \text{ [Eucl. V, 9]}.$$

uerum $M\Lambda \times \Lambda N = K\Lambda^2$. quare etiam

$$K\Lambda^2 = \Theta Z \times Z\Lambda.$$

καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ παραβολή, ἡ δὲ $ΘΖ$ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἐπὶ τὴν $ΖΗ$ διάμετρον, καλείσθω δὲ καὶ ὀρθία.

ιβ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, καὶ ἡ διάμετρος τῆς τομῆς ἐκβαλλομένη συμπίπτῃ μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ κοινῇ τομῇ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τῆς βάσεως τοῦ κώνου, ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ ἐπ' εὐθείας μὲν οὖσα τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς, ὑποτείνουσα δὲ τὴν ἐκτὸς τοῦ τριγώνου γωνίαν, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς βάσεως τμημάτων, ὧν ποιεῖ ἡ ἀχθεῖσα, πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς, ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ὑποτεινούσης τὴν ἐκτὸς γωνίαν τοῦ τριγώνου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ $Α$ σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $ΒΓ$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ

4. ιβ'] p, om. V, m. 2 v. 15. εὐθείας] comp. V. μένουσα V, corr. Command.

uocetur autem talis sectio parabola, $ΘZ$ autem recta parametrus rectarum ad ZH diametrum ordinate ductarum, uocetur autem etiam latus rectum.

XII.

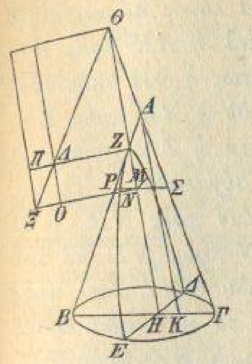
Si conus per axem plano secatur, secatur autem alio quoque plano, quod basim coni secundum rectam secat ad basim trianguli per axem positi perpendicularem, et diametrus sectionis producta cum latere aliquo trianguli per axem positi extra uerticem coni concurrit, quaelibet recta, quae a sectione ducitur parallela communi sectioni plani secantis basisque coni, ad diametrum sectionis sumpta quadrata aequalis erit spatio cuidam rectae adplicato, ad quam recta in producta diametro sectionis posita, subtendens autem sub angulo trianguli extrinsecus posito, rationem habet, quam quadratum rectae a uertice coni ad basim trianguli diametro sectionis parallelae ductae ad rectangulum comprehensum partibus basis, quas efficit recta ducta, latitudinem habens rectam ab ea ex diametro ad uerticem sectionis abscisam, excedens figura simili similiterque posita rectangulo comprehenso recta sub angulo trianguli extrinsecus posito subtendenti parametroque; uocetur autem talis sectio hyperbola.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem circulus $BΓ$, et per axem plano secetur, quod sectionem efficiat $ABΓ$ triangulum, secetur autem alio quoque plano basim coni secanti secundum rectam $ΔE$ ad $BΓ$ basim trianguli $ABΓ$ perpendicularem, et in superficie coni sectionem efficiat lineam $ΔZE$, diametrus autem sectionis ZH producta cum $AΓ$ latere trianguli ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ᾽ εὐθεῖαν τὴν ΔE πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ $B\Gamma$ βάσει τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔZE γραμμήν, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἡ ZH ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω μιᾷ πλευρᾷ τοῦ $AB\Gamma$ τριγώνου τῇ $A\Gamma$ ἐκτὸς τῆς τοῦ κώνου κορυφῆς κατὰ τὸ Θ, καὶ διὰ τοῦ A τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ZH παράλληλος ἤχθω ἡ AK, καὶ τεμνέτω τὴν $B\Gamma$, καὶ ἀπὸ τοῦ Z τῇ ZH πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $Z\Lambda$, καὶ πεποιήσθω, ὡς τὸ ἀπὸ KA πρὸς τὸ ὑπὸ $BK\Gamma$, οὕτως ἡ $Z\Theta$ πρὸς $Z\Lambda$, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν τὸ M, καὶ διὰ τοῦ M τῇ ΔE παράλληλος ἤχθω ἡ MN, διὰ δὲ τοῦ N τῇ $Z\Lambda$ παράλληλος ἡ $NO\Xi$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $\Theta\Lambda$ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τῶν Λ, Ξ τῇ ZN παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΛO, $\Xi\Pi$. λέγω, ὅτι ἡ MN δύναται τὸ $Z\Xi$, ὃ παράκειται παρὰ τὴν $Z\Lambda$ πλάτος ἔχον τὴν ZN ὑπερβάλλον εἴδει τῷ $\Lambda\Xi$ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν $\Theta Z\Lambda$.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ N τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ $PN\Sigma$· ἔστι δὲ καὶ ἡ NM τῇ ΔE παράλληλος· τὸ ἄρα διὰ τῶν MN, $P\Sigma$ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν $B\Gamma$, ΔE, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ τὸ διὰ τῶν MN, $P\Sigma$ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ $PN\Sigma$. καὶ ἔστιν ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἡ MN· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν $PN\Sigma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς MN. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ AK πρὸς τὸ ὑπὸ $BK\Gamma$, οὕτως ἡ $Z\Theta$ πρὸς $Z\Lambda$, ὁ δὲ τοῦ

2. Ante τέμνοντι del. διὰ τοῦ ἄξονος m. 1 V. 11. πεποιείσθω V, corr. p. KA] p, $K\Lambda$ V, corr. m. 2 v. 15. $NO\Xi$] p; $O\Xi$ corr. ex $\Omega\Xi$ post ras. unius litt. V, $\Omega\Xi$ supra scr. N m. 2 v.

$AB\Gamma$ extra uerticem coni concurrat in Θ, et per A diametro sectionis ZH parallela ducatur AK secetque $B\Gamma$, et a Z ad ZH perpendicularis ducatur $Z\Lambda$, fiatque



$$KA^2 : BK \times K\Gamma = Z\Theta : Z\Lambda,$$

et in sectione sumatur punctum aliquod M, et per M rectae ΔE parallela ducatur MN, per N autem rectae $Z\Lambda$ parallela $NO\Xi$, et ducta $\Theta\Lambda$ producatur ad Ξ, et per puncta Λ, Ξ rectae ZN parallelae ducantur ΛO, $\Xi\Pi$. dico, esse $MN^2 = Z\Xi$, quod rectae $Z\Lambda$ adplicatum est latitudinem habens ZN et excedens figura $\Lambda\Xi$ simili rectangulo $\Theta Z \times Z\Lambda$ [Eucl. I, 26].

ducatur enim per N rectae $B\Gamma$ parallela $PN\Sigma$; est autem etiam NM rectae ΔE parallela; quare planum rectarum MN, $P\Sigma$ plano rectarum $B\Gamma$, ΔE parallelum est [Eucl. XI, 15], hoc est basi coni. itaque ducto plano rectarum MN, $P\Sigma$ sectio circulus erit, cuius diametrus est $PN\Sigma$ [prop. IV]. et ad eam perpendicularis est MN. itaque $PN \times N\Sigma = MN^2$. et quoniam est

$$AK^2 : BK \times K\Gamma = Z\Theta : Z\Lambda,$$

et est

$$AK^2 : BK \times K\Gamma = (AK : K\Gamma) \times (AK : KB),$$

erit etiam

$$Z\Theta : Z\Lambda = (AK : K\Gamma) \times (AK : KB).$$

est autem

$$AK : K\Gamma = \Theta H : H\Gamma = \Theta N : N\Sigma \text{ [Eucl. VI, 4]}$$

ἀπὸ τῆς AK πρὸς τὸ ὑπὸ $BK\Gamma$ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ AK πρὸς $K\Gamma$ καὶ ἡ AK πρὸς KB, καὶ ὁ τῆς $Z\Theta$ ἄρα πρὸς τὴν $Z\Lambda$ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ AK πρὸς $K\Gamma$ καὶ ἡ AK πρὸς KB. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ AK πρὸς $K\Gamma$, οὕτως ἡ ΘH πρὸς $H\Gamma$, τουτέστιν ἡ ΘN πρὸς $N\Sigma$, ὡς δὲ ἡ AK πρὸς KB, οὕτως ἡ ZH πρὸς HB, τουτέστιν ἡ ZN πρὸς NP. ὁ ἄρα τῆς ΘZ πρὸς $Z\Lambda$ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΘN πρὸς $N\Sigma$ καὶ τοῦ τῆς ZN πρὸς NP. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΘN πρὸς $N\Sigma$ καὶ τοῦ τῆς ZN πρὸς NP ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘNZ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣNP· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘNZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣNP, οὕτως ἡ ΘZ πρὸς $Z\Lambda$, τουτέστιν ἡ ΘN πρὸς $N\Xi$. ἀλλ' ὡς ἡ ΘN πρὸς $N\Xi$, τῆς ZN κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘNZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $ZN\Xi$. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ τῶν ΘNZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΣNP, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΘNZ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΞNZ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΣNP ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΞNZ. τὸ δὲ ἀπὸ MN ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ ΣNP· καὶ τὸ ἀπὸ τῆς MN ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΞNZ. τὸ δὲ ὑπὸ ΞNZ ἐστι τὸ ΞZ παραλληλόγραμμον. ἡ ἄρα MN δύναται τὸ ΞZ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν $Z\Lambda$ πλάτος ἔχον τὴν ZN ὑπερβάλλον τῷ $\Lambda\Xi$ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν $\Theta Z\Lambda$. καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ὑπερβολή, ἡ δὲ ΛZ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ZH καταγόμεναι τεταγμένως· καλείσθω δὲ ἡ αὐτὴ καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ $Z\Theta$.

10. τοῦ] (alt.) p, om. V. 11. NP] HP V; corr. p. 17. ΣNP — 18. τῶν (alt.)] om. V; ego addidi praeeunte Commandino; $ZN, N\Xi$, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν $\Theta N, NZ$ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $PN, N\Sigma$ p. 26. δύναται V; corr. p.

et

$$AK : KB = ZH : HB = ZN : NP \text{ [ib.]}.$$

itaque

$$\Theta Z : Z\Lambda = (\Theta N : N\Sigma) \times (ZN : NP).$$

est autem

$$(\Theta N : N\Sigma) \times (ZN : NP) = \Theta N \times NZ : \Sigma N \times NP.$$

quare

$$\Theta N \times NZ : \Sigma N \times NP = \Theta Z : Z\Lambda = \Theta N : N\Xi \text{ [ib.]}.$$

sumpta autem communi altitudine ZN est

$$\Theta N : N\Xi = \Theta N \times NZ : ZN \times N\Xi.$$

quare etiam

$$\Theta N \times NZ : \Sigma N \times NP = \Theta N \times NZ : \Xi N \times NZ.$$

itaque

$$\Sigma N \times NP = \Xi N \times NZ \text{ [Eucl. V, 9]}.$$

demonstrauimus autem, esse

$$MN^2 = \Sigma N \times NP.$$

itaque etiam

$$MN^2 = \Xi N \times NZ.$$

uerum

$$\Xi N \times NZ = \Xi Z.$$

ergo MN quadrata aequalis est rectangulo ΞZ, quod rectae $Z\Lambda$ adplicatum est latitudinem habens ZN et excedens spatio $\Lambda\Xi$ simili rectangulo $\Theta Z\Lambda$. uocetur autem talis sectio hyperbola, ΛZ autem parametrus rectarum ad ZH ordinate ductarum; uocetur autem eadem latus rectum, transuersum uero $Z\Theta$.

ιγ'.

Ἐὰν κῶνος ἐπιπέδῳ τμηθῇ διὰ τοῦ ἄξονος, τμηθῇ δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παρὰ τὴν βάσιν τοῦ κώνου ἠγμένῳ μήτε ὑπεναντίως, τὸ δὲ ἐπίπεδον, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, καὶ τὸ τέμνον ἐπίπεδον συμπίπτῃ κατ' εὐθεῖαν πρὸς ὀρθὰς οὖσαν ἤτοι τῇ βάσει τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἢ τῇ ἐπ' εὐθείας αὐτῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς τοῦ κώνου παράλληλος ἀχθῇ τῇ κοινῇ τομῇ τῶν ἐπιπέδων ἕως τῆς διαμέτρου τῆς τομῆς, δυνήσεταί τι χωρίον παρακείμενον παρά τινα εὐθεῖαν, πρὸς ἣν λόγον ἔχει ἡ διάμετρος τῆς τομῆς, ὃν τὸ τετράγωνον τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης ἀπὸ τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς ἕως τῆς βάσεως τοῦ τριγώνου πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῆς πρὸς ταῖς τοῦ τριγώνου εὐθείαις πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς διαμέτρου καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται· καλείσθω δὲ ἡ τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις.

ἔστω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ A σημεῖον, βάσις δὲ ὁ $B\Gamma$ κύκλος, καὶ τετμήσθω ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ ποιείτω τομὴν τὸ $AB\Gamma$ τρίγωνον, τετμήσθω δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ συμπίπτοντι μὲν ἑκατέρᾳ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου, μήτε δὲ παραλλήλῳ τῇ βάσει τοῦ κώνου μήτε ὑπεναντίως ἠγμένῳ, καὶ ποιείτω τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τοῦ κώνου τὴν ΔE γραμμήν·

1. ιγ'] om. V, m. 2 v. 13. τετράγωνον] cv; τε- euan. V, τετρα- rep. mg. m. rec. 16. εὐθείαις] V, γωνίαις cvp. 20. δύναται V; corr. Memus.

XIII.

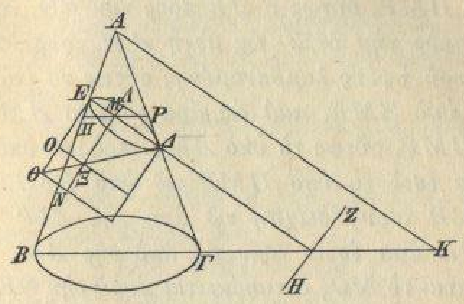
Si conus per axem plano secatur, secatur autem alio quoque plano, quod cum utroque latere trianguli per axem positi concurrit, sed neque basi coni parallelum ducitur neque e contrario, et si planum, in quo est basis coni, planumque secans concurrunt in recta perpendiculari aut ad basim trianguli per axem positi aut ad eam productam, quaelibet recta, quae a sectione coni communi sectioni planorum parallela ducitur, ad diametrum sectionis sumpta quadrata aequalis erit spatio adplicato rectae cuidam, ad quam diametrus sectionis rationem habet, quam habet quadratum rectae a uertice coni diametro sectionis parallelae ductae usque ad basim trianguli ad rectangulum comprehensum rectis ab ea ad latera trianguli abscisis, latitudinem habens rectam ab ea e diametro ad uerticem sectionis abscisam et figura deficiens simili similiterque posita rectangulo a diametro parametroque comprehenso; uocetur autem talis sectio ellipsis.

sit conus, cuius uertex sit A punctum, basis autem $B\Gamma$ circulus, et per axem plano secetur, quod sectionem efficiat triangulum $AB\Gamma$, secetur autem alio quoque plano, quod cum utroque latere trianguli per axem positi concurrat, sed neque basi coni parallelum neque e contrario ductum sit, et in superficie coni sectionem efficiat lineam ΔE; communis autem sectio plani secantis eiusque plani, in quo est basis coni, sit ZH ad $B\Gamma$ perpendicularis, diametrus autem sectionis sit $E\Delta$, et ab E ad $E\Delta$ perpendicularis ducatur $E\Theta$, per A autem rectae $E\Delta$ parallela ducatur AK, et fiat κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ τέμνοντος ἐπιπέδου καὶ τοῦ, ἐν ᾧ ἐστιν ἡ βάσις τοῦ κώνου, ἔστω ἡ ΖΗ πρὸς ὀρθὰς οὖσα τῇ ΒΓ, ἡ δὲ διάμετρος τῆς τομῆς ἔστω ἡ ΕΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΔ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΕΘ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΚ, καὶ πεποιήσθω ὡς τὸ ἀπὸ ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Λ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΖΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΛΜ δύναταί τι χωρίον, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΕΘ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΕΘ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΘ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Μ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΞΝ, διὰ δὲ τῶν Θ, Ξ τῇ ΕΜ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΘΝ, ΞΟ, καὶ διὰ τοῦ Μ τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΜΡ. ἐπεὶ οὖν ἡ ΠΡ τῇ ΒΓ παράλληλός ἐστιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ ΛΜ τῇ ΖΗ παράλληλος, τὸ ἄρα διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον παράλληλόν ἐστι τῷ διὰ τῶν ΖΗ, ΒΓ ἐπιπέδῳ, τουτέστι τῇ βάσει τοῦ κώνου. ἐὰν ἄρα ἐκβληθῇ διὰ τῶν ΛΜ, ΠΡ ἐπίπεδον, ἡ τομὴ κύκλος ἔσται, οὗ διάμετρος ἡ ΠΡ. καί ἐστι κάθετος ἐπ' αὐτὴν ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΠΜΡ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΛΜ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ, οὕτως ἡ ΕΔ πρὸς τὴν ΕΘ, ὁ δὲ τοῦ ἀπὸ τῆς ΑΚ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΒΚΓ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, καὶ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως ἡ ΕΗ πρὸς ΗΒ, τουτέστιν ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, ὡς δὲ ἡ ΑΚ πρὸς ΚΓ, οὕτως ἡ ΔΗ πρὸς ΗΓ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ ἄρα τῆς ΔΕ πρὸς

4. ΕΘ] e corr. m. 1 V. 6. πεποιείσθω V; corr. p. 13. ΜΞΝ] ΜΝΞ V; corr. Command. 15. ἡ] (pr.) om. V; corr. p.

$\varDelta E : E\Theta = AK^2 : BK \times K\Gamma$, et in sectione sumatur punctum aliquod Λ, et per Λ rectae ZH parallela ducatur ΛM. dico, ΛM quadratam aequalem esse spatio rectae EΘ adplicato, quod latitudinem habeat EM et figura deficiat simili rectangulo $\varDelta E \times E\Theta$.



ducatur enim ΔΘ, et per M rectae ΘE parallela ducatur MΞN, per Θ, Ξ autem rectae EM parallelae ducantur ΘN, ΞO, et per M rectae BΓ parallela ducatur ΠMP. iam quoniam ΠP rectae BΓ parallela est, et etiam ΛM rectae ZH parallela, planum rectarum ΛM, ΠP plano rectarum ZH, BΓ parallelum est [Eucl. XI, 15], hoc est basi coni. itaque si per ΛM, ΠP planum ducitur, sectio circulus erit, cuius diametrus erit ΠP [prop. IV]. et ad eam perpendicularis est ΛM; itaque erit $\Lambda M^2 = \Pi M \times MP$. et quoniam est

$$AK^2 : BK \times K\Gamma = E\varDelta : E\Theta,$$

et est

$$AK^2 : BK \times K\Gamma = (AK : KB) \times (AK : K\Gamma),$$

et est

$$AK : KB = EH : HB = EM : M\Pi \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

$$AK : K\Gamma = \varDelta H : H\Gamma = \varDelta M : MP \text{ [ib.]},$$

τὴν ΕΘ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΕΜ πρὸς ΜΠ καὶ τοῦ τῆς ΔΜ πρὸς ΜΡ. ὁ δὲ συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΠ, καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΡ, ὁ τοῦ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ. ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ τῶν ΕΜΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΠΜΡ, οὕτως ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΕΘ, τουτέστιν ἡ ΔΜ πρὸς τὴν ΜΞ. ὡς δὲ ἡ ΔΜ πρὸς ΜΞ, τῆς ΜΕ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΠΜΡ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΔΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΞΜΕ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΠΜΡ τῷ ὑπὸ ΞΜΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΠΜΡ ἴσον ἐδείχθη τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ· καὶ τὸ ὑπὸ ΞΜΕ ἄρα ἐστὶν ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΔΜ. ἡ ΔΜ ἄρα δύναται τὸ ΜΟ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΘΕ πλάτος ἔχον τὴν ΕΜ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΟΝ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΔΕΘ. καλείσθω δὲ ἡ μὲν τοιαύτη τομὴ ἔλλειψις, ἡ δὲ ΕΘ παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΔΕ τεταγμένως, ἡ δὲ αὐτὴ καὶ ὀρθία, πλαγία δὲ ἡ ΕΔ.

ιδ′.

Ἐὰν αἱ κατὰ κορυφὴν ἐπιφάνειαι ἐπιπέδῳ τμηθῶσι μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, ἔσται ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἐπιφανειῶν τομὴ ἡ καλουμένη ὑπερβολή, καὶ τῶν δύο τομῶν ἥ τε διάμετρος ἡ αὐτὴ ἔσται, καὶ παρ' ἃς δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν διάμετρον καταγόμεναι παράλληλοι τῇ ἐν τῇ βάσει τοῦ κώνου εὐθείᾳ ἴσαι, καὶ τοῦ εἴδους ἡ πλαγία πλευρὰ κοινη ἡ μεταξὺ τῶν κορυφῶν τῶν τομῶν· καλείσθωσαν δὲ αἱ τοιαῦται τομαὶ ἀντικείμεναι.

---

4. ὁ τοῦ — 5. ΠΜΡ] bis V, corr. cp et m. 2 v. 20. ιδ′] p, om. V, m. 2 v. 25. ἐπί] παρά Vp; corr. Halley. 26. εὐθείᾳ] ego, εὐθεῖαι V.

erit
$$\Delta E : E\Theta = (EM : M\Pi) \times (\Delta M : MP).$$
est autem
$$(EM : M\Pi) \times (\Delta M : MP) = EM \times M\Delta : \Pi M \times MP.$$
itaque
$$EM \times M\Delta : \Pi M \times MP = \Delta E : E\Theta = \Delta M : M\Xi$$
[ib.]. sed sumpta communi altitudine ME est
$$\Delta M : M\Xi = \Delta M \times ME : \Xi M \times ME.$$
quare etiam
$$\Delta M \times ME : \Pi M \times MP = \Delta M \times ME : \Xi M \times ME.$$
itaque
$$\Pi M \times MP = \Xi M \times ME \text{ [Eucl. V, 9].}$$
demonstrauimus autem, esse
$$\Pi M \times MP = \Delta M^2.$$
quare etiam $\Xi M \times ME = \Delta M^2$.

ergo ΔM quadrata aequalis est spatio MO ad ΘE adplicato, quod latitudinem habet EM et spatio ON deficit simili rectangulo $\Delta E \times E\Theta$; uocetur autem talis sectio ellipsis, $E\Theta$ autem parametrus rectarum ad ΔE ordinate ductarum, eadem autem etiam latus rectum, transuersum uero $E\Delta$.

XIV.

Si superficies ad uerticem inter se positae plano secantur per uerticem non ducto, in utraque superficie sectio orietur hyperbola, quae uocatur, et ambarum sectionum diametrus eadem erit, et parametri rectarum ad diametrum rectae in basi coni positae parallelarum ductarum aequales, et transuersum figurae latus commune recta inter uertices sectionum posita; uocentur autem tales sectiones oppositae.

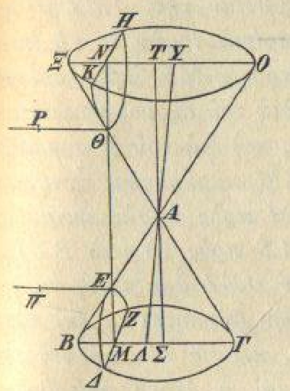
ἔστωσαν αἱ κατα κορυφὴν ἐπιφάνειαι, ὧν κορυφὴ τὸ Α σημεῖον, καὶ τετμήσθωσαν ἐπιπέδῳ μὴ διὰ τῆς κορυφῆς, καὶ ποιείτω ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τομὰς τὰς ΔΕΖ, ΗΘΚ. λέγω, ὅτι ἑκατέρα τῶν ΔΕΖ, ΗΘΚ τομῶν ἐστιν ἡ καλουμένη ὑπερβολή.

ἔστω γὰρ ὁ κύκλος, καθ' οὗ φέρεται ἡ τὴν ἐπιφάνειαν γράφουσα εὐθεῖα, ὁ ΒΔΓΖ, καὶ ἤχθω ἐν τῇ κατὰ κορυφην ἐπιφανείᾳ παράλληλον αὐτῷ ἐπίπεδον τὸ ΞΗΟΚ· κοιναὶ δὲ τομαὶ τῶν ΗΘΚ, ΖΕΔ τομῶν καὶ τῶν κύκλων αἱ ΖΔ, ΗΚ· ἔσονται δὴ παράλληλοι. ἄξων δὲ ἔστω τῆς κωνικῆς ἐπιφανείας η ΛΑΥ εὐθεῖα, κέντρα δὲ τῶν κύκλων τὰ Λ, Υ, καὶ ἀπὸ τοῦ Λ ἐπὶ τὴν ΖΔ κάθετος ἀχθεῖσα ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Β, Γ σημεῖα, καὶ διὰ τῆς ΒΓ καὶ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ἐκβεβλήσθω· ποιήσει δὴ τομὰς ἐν μὲν τοῖς κύκλοις παραλλήλους εὐθείας τὰς ΞΟ, ΒΓ, ἐν δὲ τῇ ἐπιφανείᾳ τὰς ΒΑΟ, ΓΑΞ· ἔσται δὴ καὶ ἡ ΞΟ τῇ ΗΚ πρὸς ὀρθάς, ἐπειδὴ καὶ ἡ ΒΓ τῇ ΖΔ ἐστι πρὸς ὀρθάς, καί ἐστιν ἑκατέρα παράλληλος. καὶ ἐπεὶ τὸ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπίπεδον ταῖς τομαῖς συμβάλλει κατὰ τὰ Μ, Ν σημεῖα ἐντὸς τῶν γραμμῶν, δῆλον, ὡς καὶ τὰς γραμμὰς τέμνει τὸ ἐπίπεδον. τεμνέτω κατὰ τὰ Θ, Ε· τὰ ἄρα Μ, Ε, Θ, Ν σημεῖα ἔν τε τῷ διὰ τοῦ ἄξονός ἐστιν ἐπιπέδῳ καὶ ἐν τῷ ἐπιπέδῳ, ἐν ᾧ εἰσιν αἱ γραμμαί· εὐθεῖα ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΕΘΝ γραμμή. καὶ φανερόν, ὅτι τά τε Ξ, Θ, Α, Γ ἐπ' εὐθείας ἐστὶ καὶ τὰ Β, Ε, Λ, Ο· ἔν τε γὰρ τῇ κωνικῇ ἐπιφανείᾳ ἐστὶ καὶ ἐν τῷ διὰ τοῦ ἄξονος ἐπιπέδῳ. ἤχθωσαν δὴ ἀπὸ μὲν τῶν Θ, Ε τῇ

3. ποιείτω] scripsi, ποιείτωσαν Vp. 9. ΖΕΔ, ΗΘΚ Halley cum Command. 20. συμβάλλει] συμ- contorte V, συμβ- rep. mg. m. rec.

sint superficies ad uerticem inter se positae, quarum uertex sit *Α* punctum, et plano secentur per uerticem non posito, quod in superficie sectiones efficiat *ΔΕΖ*, *ΗΘΚ*. dico, utramque sectionem *ΔΕΖ*, *ΗΘΚ* hyperbolam esse, quae uocatur.

sit enim *ΒΔΓΖ* circulus, per quem recta superficiem describens fertur, et in superficie ad uerticem posita ei parallelum planum ducatur *ΞΗΟΚ*; communes autem sectiones sectionum *ΗΘΚ*, *ΖΕΔ* circulorumque [prop. IV] sunt *ΖΔ*, *ΗΚ*; parallelae igitur erunt [Eucl. XI, 16]. axis autem superficiei conicae sit recta *ΛΑΥ*, et centra circulorum *Λ*, *Υ*, et recta ab *Λ* ad *ΖΔ* perpendicularis ducta ad puncta *Β*, *Γ* producatur, et per *ΒΓ* axemque planum ducatur; sectiones igitur efficiet in circulis rectas parallelas [ib.] *ΞΟ*, *ΒΓ*, in superficie autem *ΒΑΟ*, *ΓΑΞ*; erit igitur etiam *ΞΟ* ad *ΗΚ* perpendicularis, quoniam *ΒΓ* ad *ΖΔ* perpendicularis est et utraque utrique parallela [Eucl. XI, 10]. et quoniam planum per axem ductum cum sectionibus in punctis *Μ*, *Ν* concurrit intra lineas positis, adparet, idem planum lineas secare. secet in punctis *Θ*, *Ε*. itaque puncta *Μ*, *Ε*, *Θ*, *Ν* et in plano per axem ducto et in plano, in quo lineae, posita sunt; recta igitur est linea *ΜΕΘΝ* [Eucl. XI, 3]. et manifestum est, et *Ξ*, *Θ*, *Α*, *Γ* in eadem recta esse et *Β*, *Ε*, *Λ*, *Ο*; nam et in superficie conica sunt et in



ΘΕ πρὸς ὀρθὰς αἱ ΘΡ, ΕΠ, διὰ δὲ τοῦ Α τῇ ΜΕΘΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΣΑΤ, καὶ πεποιήσθω, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΘΕ πρὸς ΕΠ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΑΤ πρὸς τὸ ὑπὸ ΟΤΞ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΘΡ. ἐπεὶ οὖν κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Α σημεῖον, βάσις δὲ ὁ ΒΓ κύκλος, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος, καὶ πεποίηκε τομὴν τὸ ΑΒΓ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν ΔΜΖ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΒΓ, καὶ πεποίηκε τομὴν ἐν τῇ ἐπιφανείᾳ τὴν ΔΕΖ, ἡ δὲ διάμετρος ἡ ΜΕ ἐκβαλλομένη συμπέπτωκε μιᾷ πλευρᾷ τοῦ διὰ τοῦ ἄξονος τριγώνου ἐκτὸς τῆς κορυφῆς τοῦ κώνου, καὶ διὰ τοῦ Α σημείου τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς τῇ ΕΜ παράλληλος ἦκται ἡ ΑΣ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε τῇ ΕΜ πρὸς ὀρθὰς ἦκται ἡ ΕΠ, καί ἐστιν ὡς τὸ ἀπὸ ΑΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, οὕτως ἡ ΕΘ πρὸς ΕΠ, ἡ μὲν ΔΕΖ ἄρα τομὴ ὑπερβολή ἐστιν, ἡ δὲ ΕΠ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΕΜ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ΗΘΚ ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΘΝ, ἡ δὲ ΘΡ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν ΘΝ καταγόμεναι τεταγμένως, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΕ.

λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΡ τῇ ΕΠ. ἐπεὶ γὰρ παράλληλός ἐστιν ἡ ΒΓ τῇ ΞΟ, ἔστιν ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΓ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΞ, καὶ ὡς ἡ ΑΣ πρὸς ΣΒ, οὕτως ἡ ΑΤ πρὸς ΤΟ. ἀλλ' ὁ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΓ λόγος μετὰ τοῦ τῆς ΑΣ πρὸς ΣΒ ὁ τοῦ ἀπὸ ΑΣ ἐστι πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΣΓ, ὁ δὲ τῆς ΑΤ πρὸς ΤΞ μετὰ τοῦ τῆς

2. πεποιείσθω V; corr. p. 3. ΒΣΓ] ΒΓΣ V; corr. Memus. 16. καί — 17. ΕΠ] bis V; corr. cp. 16. ΒΣΓ] ΒΓΣ V

plano per axem ducto. ducantur igitur a Θ, E ad rectam ΘE perpendiculares ΘP, $E\Pi$, per A autem rectae $ME\Theta N$ parallela ducatur ΣAT, et fiat

$$\Theta E : E\Pi = A\Sigma^2 : B\Sigma \times \Sigma\Gamma,$$
$$E\Theta : \Theta P = AT^2 : OT \times T\Xi.$$

iam quoniam conus, cuius uertex est punctum A, basis autem $B\Gamma$ circulus, plano per axem sectus est, quod sectionem effecit triangulum $AB\Gamma$, et alio quoque plano sectus est, quod basim coni secundum rectam ΔMZ secat ad $B\Gamma$ perpendicularem et in superficie sectionem effecit ΔEZ, et diametrus ME producta cum latere trianguli per axem positi extra uerticem coni concurrit, et per A punctum EM diametro sectionis parallela ducta est $A\Sigma$, et ab E ad EM perpendicularis ducta est $E\Pi$, et est

$$E\Theta : E\Pi = A\Sigma^2 : B\Sigma \times \Sigma\Gamma,$$

sectio ΔEZ hyperbola est, $E\Pi$ autem parametrus rectarum ad EM ordinate ductarum, transuersum autem latus figurae ΘE [prop. XII]. et eodem modo etiam $H\Theta K$ hyperbola est, cuius diametrus est ΘN, parametrus autem rectarum ad ΘN ordinate ductarum ΘP, transuersum autem latus figurae ΘE.

dico, esse $\Theta P = E\Pi$. nam quoniam $B\Gamma$ rectae ΞO parallela est, erit

$$A\Sigma : \Sigma\Gamma = AT : T\Xi, \quad A\Sigma : \Sigma B = AT : TO$$

[Eucl. VI, 4]. uerum

$$(A\Sigma : \Sigma\Gamma) \times (A\Sigma : \Sigma B) = A\Sigma^2 : B\Sigma \times \Sigma\Gamma,$$
$$(AT : T\Xi) \times (AT : TO) = AT^2 : \Xi T \times TO.$$

(utroque loco); corr. Memus. 19. τεταγμένως] τετ- contorte V, τετα... mg. m. rec. 27. ΣΓ] Γ V, corr. p. 28. ΣΒ] Β V; corr. p. 29. τό] cv, supra scr. m. 1 V.

AT πρὸς TO ὁ τοῦ ἀπὸ AT πρὸς τὸ ὑπὸ ΞTO· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ἀπὸ $A\Sigma$ πρὸς τὸ ὑπὸ $B\Sigma\Gamma$, οὕτως τὸ ἀπὸ AT πρὸς τὸ ὑπὸ ΞTO. καί ἐστιν ὡς μὲν τὸ ἀπὸ $A\Sigma$ πρὸς τὸ ὑπὸ $B\Sigma\Gamma$, ἡ ΘE πρὸς $E\Pi$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ AT πρὸς τὸ ὑπὸ ΞTO, ἡ ΘE πρὸς ΘP· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΘE πρὸς $E\Pi$, ἡ $E\Theta$ πρὸς ΘP. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Pi$ τῇ ΘP.

ιε΄.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἀπὸ τῆς διχοτομίας τῆς διαμέτρου ἀχθεῖσα εὐθεῖα τεταγμένως ἐκβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς, καὶ ποιηθῇ ὡς ἡ ἐκβληθεῖσα πρὸς τὴν διάμετρον, ἡ διάμετρος πρός τινα εὐθεῖαν, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐκβληθεῖσαν παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον παρὰ τὴν τρίτην ἀνάλογον πλάτος ἔχον τὴν ὑπ' αὐτῆς ἀπολαμβανομένην πρὸς τῇ τομῇ ἐλλεῖπον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπό τε τῆς ἐφ' ἣν ἄγονται καὶ τῆς παρ' ἣν δύνανται, καὶ προσεκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐφ' ἣν κατῆκται.

ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Γ σημεῖον, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω τεταγμένως καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα ἕως τῆς τομῆς ἡ $\Delta\Gamma E$, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ σημείου τῇ ΔE πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΔZ, καὶ ποιείσθω ὡς ἡ ΔE πρὸς AB, οὕτως ἡ AB πρὸς τὴν ΔZ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ H, καὶ διὰ τοῦ H τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $H\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Θ τῇ

8. ιε΄] p, om. V, m. 2 v. 11. ποιήσῃ V, corr. Halley. 19. μέρους] μέτρου V, corr. p et m. 2 v. 23. ἐκβεβλήσθω] cp, ἐκβλήσθω V, corr. m. rec. 24. τοῦ] p, om. V.

erit igitur $A\Sigma^2 : B\Sigma \times \Sigma\Gamma = AT^2 : \Xi T \times TO$. est autem $\Theta E : E\Pi = A\Sigma^2 : B\Sigma \times \Sigma\Gamma$,

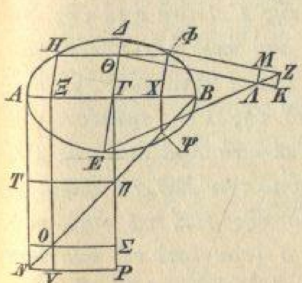
$$\Theta E : \Theta P = AT^2 : \Xi T \times TO.$$

quare etiam $\Theta E : E\Pi = E\Theta : \Theta P$. ergo $E\Pi = \Theta P$ [Eucl. V, 9].

XV.

Si in ellipsi recta a puncto medio diametri ordinate ducta in utramque partem usque ad sectionem producitur, et fit, ut producta ad diametrum, ita diametrus ad rectam aliquam, quaelibet recta, quae a sectione ad productam diametro parallela ducitur, quadrata aequalis erit spatio tertiae illi proportionali adplicato, quod latitudinem habet rectam ab ea ad sectionem abscisam et figura deficit simili rectangulo ab ea, ad quam ducuntur, parametroque comprehenso, et ad alteram partem sectionis producta a recta, ad quam ducta est, in duas partes aequales secabitur.

sit ellipsis, cuius diametrus sit AB, et secetur AB in Γ puncto in duas partes aequales, et per Γ ordinate ducatur et in utramque partem usque ad sectionem producatur $\Delta\Gamma E$, et a Δ puncto ad ΔE perpendicularis ducatur ΔZ, fiatque



$$AB : \Delta Z = \Delta E : AB,$$

et sumatur punctum aliquod H in sectione, et per H rectae AB parallela ducatur $H\Theta$, ducaturque EZ, et per Θ rectae ΔZ parallela ducatur $\Theta\Lambda$, per Z, Λ autem rectae $\Theta\Delta$ parallelae ducantur

ΔΖ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΛ, δια δὲ τῶν Ζ, Λ τῇ ΘΔ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΖΚ, ΛΜ. λέγω, ὅτι ἡ ΗΘ δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ πλάτος ἔχον τὴν ΔΘ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΔΖ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ ΕΔΖ.

ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ την ΑΒ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ ΑΝ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΒΝ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΔΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΞ, δια δὲ τῶν Ξ, Γ τῇ ΑΝ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΞΟ, ΓΠ, διὰ δὲ τῶν Ν, Ο, Π τῇ ΑΒ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΝΥ, ΟΣ, ΤΠ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΔΓ τῷ ΑΠ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ΑΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΝ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΠ, καὶ ἡ ΠΤ προς ΤΝ, ἴση δὲ ἡ ΒΓ τῇ ΓΑ, τουτέστι τῇ ΤΠ, καὶ ἡ ΓΠ τῇ ΤΑ, ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ΑΠ τῷ ΤΡ, τὸ δὲ ΞΤ τῷ ΤΥ. καὶ ἐπεὶ το ΟΤ τῷ ΟΡ ἐστιν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΝΟ, τὸ ΤΥ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΝΣ. ἀλλὰ τὸ ΤΥ τῷ ΤΞ ἐστιν ἴσον, κοινὸν δὲ τὸ ΤΣ· ὅλον ἄρα τὸ ΝΠ, τουτέστι τὸ ΠΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΟ μετὰ τοῦ ΠΟ· ὥστε τὸ ΠΑ τοῦ ΑΟ ὑπερέχει τῷ ΟΠ. καί ἐστι το μὲν ΑΠ ἴσον τῷ ἀπο τῆς ΓΔ, τὸ δὲ ΑΟ ἴσον τῷ ἀπὸ τῆς ΞΗ, τὸ δὲ ΟΠ ἴσον τῷ ὑπὸ ΟΣΠ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπο τῆς ΗΞ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Γ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ, τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς ΓΘ, τουτέστι τῆς ΞΗ, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΔ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΞΗ ὑπερέχει τῷ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ· ὑπερεῖχε δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ΓΔ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ· τὸ ἄρα ὑπὸ τῶν ΕΘΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΟΣΠ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ

---

1. ΘΔ] ΘΛ V; corr. p. 10. ΝΥ] ΝΥΡ Halley cum Command., ΝΡ p. 12. διὰ τὸ δ' [τοῦ] ς' mg. m. 1 V

ZK, ΛM. dico, esse $H\Theta^2 = \Delta\Lambda$, quod rectae ΔZ adplicatum est latitudinem habens $\Delta\Theta$ et figura deficiens ΔZ simili rectangulo $E\Delta Z$.

sit enim parametrus rectarum ad AB ordinate ductarum AN, ducaturque BN, et per H rectae ΔE parallela ducatur $H\Xi$, per Ξ, Γ autem rectae AN parallela ducantur ΞO, $\Gamma\Pi$, per N, O, Π autem rectae AB parallelae ducantur $N\Upsilon$, $O\Sigma$, $T\Pi$; itaque

$$\Delta\Gamma^2 = A\Pi,\ H\Xi^2 = AO \text{ [prop. XIII]}.$$

et quoniam est

$$BA : AN = B\Gamma : \Gamma\Pi = \Pi T : TN \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

et $B\Gamma = \Gamma A = T\Pi$, $\Gamma\Pi = TA$, erit $A\Pi = TP$, $\Xi T = T\Upsilon$ [Eucl. VI, 1]. et quoniam $OT = OP$ [Eucl. I, 43], et NO commune est, erit $T\Upsilon = N\Sigma$. est autem $T\Upsilon = T\Xi$, et $T\Sigma$ commune. quare $N\Pi = AO + \Pi O$, hoc est $\Pi A = AO + \Pi O$. itaque $\Pi A \div AO = O\Pi$. est autem

$$A\Pi = \Gamma\Delta^2,\ AO = \Xi H^2,\ O\Pi = O\Sigma \times \Sigma\Pi;$$

itaque

$$\Gamma\Delta^2 \div H\Xi^2 = O\Sigma \times \Sigma\Pi.$$

et quoniam ΔE in Γ in partes aequales, in Θ autem in inaequales secta est, erit $E\Theta \times \Theta\Delta + \Gamma\Theta^2 = \Gamma\Delta^2$ [Eucl. II, 5] $= E\Theta \times \Theta\Delta + \Xi H^2$. quare

$$\Gamma\Delta^2 \div \Xi H^2 = E\Theta \times \Theta\Delta.$$

erat autem

$$\Gamma\Delta^2 \div H\Xi^2 = O\Sigma \times \Sigma\Pi.$$

quare

$$E\Theta \times \Theta\Delta = O\Sigma \times \Sigma\Pi.$$

στοιχείων add. m. rec. 13. ΓΠ] ΒΠ V; corr. Memus. ΤΑ] scripsi; ΠΝ V, ΤΝ ἐστιν ἴση Halley, *tn* Command. et Memus.

ΑΒ πρὸς τὴν ΔΖ, ἔστιν ἄρα καὶ ὡς ἡ ΔΕ πρὸς τὴν ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΑΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ. καί ἐστι τῷ ἀπὸ ΓΔ ἴσον τὸ ὑπὸ ΠΓΑ, τουτέστι το ὑπὸ ΠΓΒ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, τουτέστιν ὡς ἡ ΕΘ πρὸς ΘΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ τῶν ΕΘΔ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΘΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ τῶν ΠΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΠΣΟ προς τὸ ἀπο ΟΣ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΕΘΔ τῷ ὑπὸ ΠΣΟ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΔΘΛ τῷ ἀπὸ τῆς ΟΣ, τουτέστι τῷ ἀπὸ τῆς ΗΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δύναται τὸ ΔΛ, ὃ παράκειται παρὰ τὴν ΔΖ ἐλλεῖπον εἴδει τῷ ΖΛ ὁμοίῳ ὄντι τῷ ὑπὸ τῶν ΕΔΖ.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐκβαλλομένη ἡ ΘΗ ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ΔΕ.

ἐκβεβλήσθω γὰρ καὶ συμβαλλέτω τῇ τομῇ κατὰ τὸ Φ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Φ τῇ ΗΞ παράλληλος ἤχθω ἡ ΦΧ, διὰ δὲ τοῦ Χ τῇ ΑΝ παράλληλος ἤχθω ἡ ΧΨ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΞ τῇ ΦΧ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΞ τῷ ἀπὸ τῆς ΦΧ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΞ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΞΟ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΦΧ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΧΨ. ἀνάλογον ἄρα ἐστὶν ὡς ἡ ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ, οὕτως ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ. καί ἐστιν ὡς η ΟΞ πρὸς τὴν ΨΧ, οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΑ πρὸς ΑΞ, οὕτως ἡ ΞΒ πρὸς ΒΧ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΧΞ πρὸς ΞΑ, οὕτως ἡ ΧΞ πρὸς ΧΒ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΞ τῇ ΧΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ΞΓ τῇ ΓΧ ἐστιν

1. διὰ τὸ [πόρισμα τοῦ] ιθ´ τοῦ [ϛ´] mg. m. 1 V. 3. διὰ τὸ ιε´ [τοῦ ε´] mg. m. 1 V. Ad lineas seqq. haec mg. m. 1 V: διὰ τὸ .... ϛ´ στοιχε ..., διὰ τὸ ..... στοιχ. διὰ τὸ δ´ ϛ´ϛ

et quoniam est $\Delta E : AB = AB : \Delta Z$, erit etiam [Eucl. V def. 9]

$$\Delta E : \Delta Z = \Delta E^2 : AB^2 = \Gamma\Delta^2 : \Gamma B^2 \text{ [Eucl. V, 15].}$$

est autem

$$\Gamma\Delta^2 = \Pi\Gamma \times \Gamma A = \Pi\Gamma \times \Gamma B.$$

quare etiam

$$E\Delta : \Delta Z = \Pi\Gamma \times \Gamma B : \Gamma B^2 = E\Theta : \Theta\Lambda$$

[Eucl. VI, 4] $= E\Theta \times \Theta\Delta : \Delta\Theta \times \Theta\Lambda = \Pi\Sigma \times \Sigma O : O\Sigma^2$ [ib.]. et est

$$E\Theta \times \Theta\Delta = \Pi\Sigma \times \Sigma O.$$

quare [Eucl. V, 9]

$$\Delta\Theta \times \Theta\Lambda = O\Sigma^2 = H\Theta^2.$$

ergo $H\Theta$ quadrata aequalis est rectangulo $\Delta\Lambda$ ad ΔZ adplicato, quod deficit figura $Z\Lambda$ rectangulo $E\Delta \times \Delta Z$ simili.

iam dico, ΘH ad alteram partem sectionis productam a ΔE in duas partes aequales secari.

producatur enim et cum sectione in Φ concurrat, per Φ autem rectae $H\Xi$ parallela ducatur ΦX, per X autem rectae AN parallela ducatur $X\Psi$. et quoniam est $H\Xi = \Phi X$ [Eucl. I, 34], erit etiam $H\Xi^2 = \Phi X^2$. uerum $H\Xi^2 = A\Xi \times \Xi O$, $\Phi X^2 = AX \times X\Psi$ [prop. XIII]. itaque [Eucl. VI, 16]

$$O\Xi : \Psi X = XA : A\Xi.$$

et $O\Xi : \Psi X = \Xi B : BX$ [Eucl. VI, 4]. quare etiam $XA : A\Xi = \Xi B : BX$. et subtrahendo $X\Xi : \Xi A = X\Xi : XB$ [Eucl. V, 17]. itaque $A\Xi = XB$ [Eucl. V, 9]. est

τὸ α´ δι ... τοῦ ϛ´ϛ´. 8. ϛϛ διὰ τὸ δ´ τοῦ ϛ´ καὶ τὸ α´ mg. m. 1 V. 14. ΘΗ] ΘΝ V; corr. p (ΗΘ).

ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΗΘ τῇ ΘΦ. ἡ ἄρα ΘΗ ἐκβαλλομένη ἕως τοῦ ἑτέρου μέρους τῆς τομῆς δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΔΘ.

ιϛʹ.

Ἐὰν διὰ τῆς διχοτομίας τῆς πλαγίας πλευρᾶς τῶν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων συζυγὴς τῇ προϋπαρχούσῃ διαμέτρῳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΑΒ κατὰ τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ ἤχθω παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστιν ἡ ΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

ἔστωσαν γὰρ παρ' ἃς δύνανται αἱ καταγόμεναι αἱ ΑΕ, ΒΖ εὐθεῖαι, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΑΖ, ΒΕ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς ἑτέρας τῶν τομῶν τυχὸν σημεῖον τὸ Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Η τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, ἀπὸ δὲ τῶν Η, Θ κατήχθωσαν τεταγμένως αἱ ΗΚ, ΘΛ, διὰ δὲ τῶν Κ, Λ ταῖς ΑΕ, ΒΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΚΜ, ΛΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΘΛ, ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΗΚ τῷ ἀπὸ τῆς ΘΛ. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ΗΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΑΚΜ, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΘΛ ἴσον τῷ ὑπὸ τῶν ΒΛΝ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΚΜ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΝ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΒΖ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΒΖ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΕ πρὸς ΑΒ, οὕτως ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, ὡς δὲ ἡ ΖΒ πρὸς ΒΑ, οὕτως ἡ ΝΛ πρὸς ΛΑ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΜΚ πρὸς ΚΒ, οὕτως

1. ἡ] (pr.) p, om. V. 4. ιϛʹ] p, om. V, m. 2 v. 6. παρατεταγμένως κατηγμένη V; corr. Halley. 11. παρατεταγμένως κατηγμένη V; corr. Halley. 21. ἴσον] om. V; corr. p.

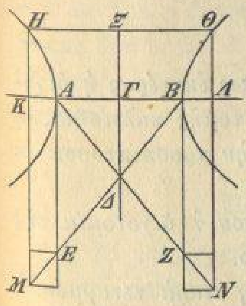
autem etiam $A\Gamma = \Gamma B$. quare etiam $\Xi\Gamma = \Gamma X$. itaque etiam $H\Theta = \Theta\Phi$. ergo ΘH ad alteram partem sectionis producta in duas partes aequales secatur a $\Delta\Theta$.

XVI.

Si per punctum medium lateris transuersi oppositarum recta rectae ordinate ductae parallela ducitur, diametrus erit oppositarum cum diametro proposita coniugata.

sint oppositae, quarum diametrus sit AB, et AB in Γ in duas partes aequales secetur, per Γ autem rectae ordinate ductae parallela ducatur $\Gamma\Delta$. dico, $\Gamma\Delta$ diametrum esse cum diametro AB coniugatam.

sint enim parametri rectae AE, BZ, et ductae AZ, BE producantur, sumaturque in alterutra sectione quoduis punctum H, et per H rectae AB parallela ducatur $H\Theta$, ab H, Θ autem ordinate ducantur HK, $\Theta\Lambda$, per K, Λ autem rectis AE, BZ parallelae ducantur KM, ΛN. quoniam igitur



$$HK = \Theta\Lambda \text{ [Eucl. I, 34]},$$

erit etiam $HK^2 = \Theta\Lambda^2$. est autem

$$HK^2 = AK \times KM,$$
$$\Theta\Lambda^2 = B\Lambda \times \Lambda N \text{ [prop. XII; Eucl. I, 34]}.$$

quare $AK \times KM = B\Lambda \times \Lambda N$. et quoniam $AE = BZ$ [prop. XIV], erit

$$AE : AB = BZ : B\Lambda \text{ [Eucl. V, 9]}.$$

22. AKM — τῶν] om. V; corr. p ($K\Lambda$, AE; corr. Memus). 23. διὰ τοῦ λδʹ τοῦ αʹ τῶν στοιχείων mg. m. 1 V. 19. ἐστίν] c, -ίν in ras. m. 1 V. 25. BZ] c, B eras. V; ZB p.

ἡ ΝΔ πρὸς τὴν ΔΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΚ πρὸς τὴν ΚΒ, τῆς ΚΔ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΔ, ὡς δὲ ἡ ΝΔ πρὸς ΔΑ, τῆς ΒΔ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΜΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΚΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΝΔΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΜΚΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔΒ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΚΔ προς τὸ ὑπὸ ΑΔΒ. καί ἐστιν ἴσον τὸ ὑπὸ ΜΚΔ τῷ ὑπὸ ΝΔΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΚΔ τῷ ὑπὸ ΑΔΒ· ἴση ἄρα ἡ ΑΚ τῇ ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ ἴση· καὶ ὅλη ἄρα ἡ ΚΓ ὅλη τῇ ΓΔ ἴση ἐστίν· ὥστε καὶ ἡ ΗΞ τῇ ΞΘ. ἡ ΗΘ ἄρα δίχα τέτμηται ὑπὸ τῆς ΞΓΔ· καί ἐστι παράλληλος τῇ ΑΒ· διάμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΞΓΔ συζυγὴς τῇ ΑΒ.

ὅροι β'.

Τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῆς ἐλλείψεως ἑκατέρας ἡ διχοτομία τῆς διαμέτρου κέντρον τῆς τομῆς καλείσθω, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν τομὴν προσπίπτουσα ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς.

ὁμοίως δὲ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἡ διχοτομία τῆς πλαγίας πλευρᾶς κέντρον καλείσθω.

ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἠγμένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην μέσον τε λόγον ἔχουσα τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ δίχα τεμνομένη ὑπὸ τοῦ κέντρου δευτέρα διάμετρος καλείσθω.

---

3. ΝΔ] cv, ΝΑ uel ΜΑ V, ΚΑ p. 10. ἄρα] ἄρα καί cp, ἄρα ἐστίν Eutocius. 13. ΞΓΔ] cv, Γ ins. m. 1 V; ΔΓΞ p. 21. ἀντιτικειμένων V; corr. cvp. 23. παρατεταγμένως V, ut uulgo.

uerum $AE : AB = MK : KB$, $ZB : BA = N\Delta : \Delta A$ [Eucl. VI, 4]. itaque etiam

$$MK : KB = N\Delta : \Delta A.$$

est autem communi altitudine sumpta $K\Delta$

$$MK : KB = MK \times K\Delta : BK \times K\Delta,$$

et communi altitudine $B\Delta$ sumpta

$$N\Delta : \Delta A = N\Delta \times \Delta B : A\Delta \times \Delta B.$$

quare etiam

$$MK \times K\Delta : BK \times K\Delta = N\Delta \times \Delta B : A\Delta \times \Delta B.$$

et permutando

$$MK \times K\Delta : N\Delta \times \Delta B = BK \times K\Delta : A\Delta \times \Delta B$$

[Eucl. V, 16]. et

$$MK \times K\Delta = N\Delta \times \Delta B.$$

quare etiam $BK \times K\Delta = A\Delta \times \Delta B$. itaque $AK = \Delta B$ [u. Eutocius]. uerum etiam $A\Gamma = \Gamma B$. quare est $K\Gamma = \Gamma\Delta$. quare etiam $H\Xi = \Xi\Theta$ [Eucl. I, 34]. itaque $H\Theta$ a $\Xi\Gamma\Delta$ in duas partes aequales secta est; et rectae AB parallela est. ergo etiam $\Xi\Gamma\Delta$ diametrus est et cum diametro AB coniugata [def. 6].

Definitiones alterae.

1. Et in hyperbola et in ellipsi punctum medium diametri centrum sectionis uocetur, recta autem a centro ad sectionem ducta radius sectionis.

2. et similiter etiam in oppositis punctum medium lateris transuersi centrum uocetur.

3. recta autem a centro rectae ordinate ductae parallela ducta, quae et mediam rationem habet laterum figurae et a centro in duas partes aequales secatur, diametrus altera uocetur.

ιζ'.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἀπὸ τῆς κορυφῆς τῆς γραμμῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ AB. λέγω, ὅτι ἡ ἀπὸ τῆς κορυφῆς, τουτέστι τοῦ A σημείου, παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ $A\Gamma$. ἐπεὶ οὖν ἐν κώνου τομῇ εἴληπται τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Γ σημείου ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγομένη παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμβαλεῖ τῇ AB διαμέτρῳ καὶ δίχα τμηθήσεται ὑπ' αὐτῆς. ἡ $A\Gamma$ ἄρα ἐκβαλλομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς AB· ὅπερ ἄτοπον· ἐκβαλλομένη γὰρ ἡ $A\Gamma$ ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς. οὐκ ἄρα ἡ ἀπὸ τοῦ A σημείου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς γραμμῆς· ἐκτὸς ἄρα πεσεῖται· διόπερ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ιη'.

Ἐὰν κώνου τομῇ εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ συμπιπτούσῃ, ἡ ἀχθεῖσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστω κώνου τομὴ καὶ συμπίπτουσα αὐτῇ ἡ AZB εὐθεῖα, καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$.

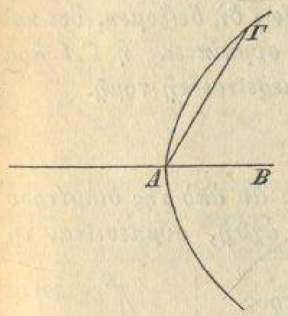
1. ιζ'] p, om. V, m. 2 v. 9. $A\Gamma$] cvp, A e corr. m. 1 V.
19. ιη'] p, om. V, m. 2 v.

XVII.

Si in sectione coni a uertice lineae recta rectae ordinate ductae parallela ducitur, extra sectionem cadet.

sit coni sectio, cuius diametrus sit AB. dico, rectam a uertice, hoc est a puncto A, rectae ordinate ductae parallelam ductam extra sectionem cadere.

nam si fieri potest, intra cadat ut $A\Gamma$. iam quoniam in coni sectione sumptum est punctum aliquod Γ, recta a Γ puncto intra sectionem ducta rectae ordinate ductae parallela cum diametro AB concurret et ab ea in duas partes aequales secabitur [prop. VII]. itaque $A\Gamma$ producta ab AB in duas partes aequales secabitur; quod fieri non postet; producta enim $A\Gamma$ extra sectionem cadit [prop. X]. itaque recta ab A puncto rectae ordinate ductae parallela ducta intra lineam non cadet. ergo extra cadet; quare sectionem contingit.



XVIII.

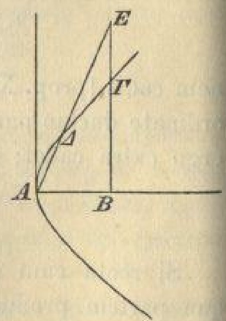
Si recta cum coni sectione concurrens in utramque partem producta extra sectionem cadit, et intra sectionem punctum aliquod sumitur, et per hoc rectae concurrenti parallela ducitur recta, recta ita ducta in utramque partem producta cum sectione concurret.

sit coni sectio et cum ea concurrens recta AZB, et in utramque partem producta extra sectionem cadat, λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EZ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ AB τῇ ΓΔ, καὶ τῇ AB συμπίπτει τις εὐθεῖα ἡ EZ, καὶ ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ EZ. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν E, Z, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπίπτει, ἐὰν δὲ ἐκτὸς τοῦ E σημείου, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ΓΔ ἐκβαλλομένη ὡς ἐπὶ τὰ Δ, E μέρη συμπίπτει τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ὡς ἐπὶ τὰ Z, B ἐκβαλλομένη συμπίπτει. ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ιθ'.

Ἐν πάσῃ κώνου τομῇ, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς διαμέτρου παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, συμπεσεῖται τῇ τομῇ.



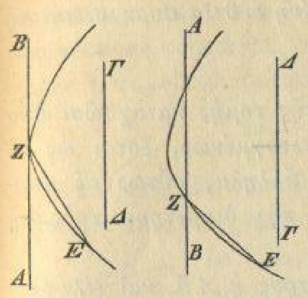
ἔστω κώνου τομή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς διαμέτρου τὸ B, καὶ διὰ τοῦ B παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ BΓ. λέγω, ὅτι ἡ BΓ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Δ· ἔστι δὲ καὶ τὸ A ἐπὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ Δ ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. καὶ ἐπεὶ ἡ ἀπὸ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, καὶ

11. ἐμπίπτει V; corr. p. 13. ιθ'] p, om. V, m. 2 v.

et intra sectionem punctum aliquod Γ sumatur, et per Γ rectae AB parallela ducatur ΓΔ. dico, ΓΔ in utramque partem productam cum sectione concurrere.

sumatur enim in sectione punctum aliquod E, et ducatur EZ. et quoniam AB rectae ΓΔ parallela est, et cum AB recta EZ concurrit, etiam ΓΔ producta cum EZ concurret. et siue inter E, Z concurrit, manifestum est, eam etiam cum sectione concurrere, siue extra punctum E, prius cum sectione concurret. itaque ΓΔ ad partes Δ, E uersus producta cum sectione concurrit. similiter demonstrabimus, eam etiam ad Z, B uersus productam concurrere. ergo ΓΔ in utramque partem producta cum sectione concurret.



XIX.

In qualibet coni sectione recta, quaecunque a diametro rectae ordinate ductae parallela ducitur, cum sectione concurret.

sit coni sectio, cuius diametrus sit AB, et in diametro punctum aliquod B sumatur, et per B rectae ordinate ductae parallela ducatur BΓ. dico, BΓ productam cum sectione concurrere.

sumatur enim in sectione punctum aliquod Δ; uerum etiam A in sectione est; itaque recta ab A ad Δ ducta intra sectionem cadet [prop. X]. et quoniam

In figura priore litteras A, B permutaui, altera in prop. 19 hab. V, sed numerus 18 (e corr.) additus ei est.

συμπίπτει αὐτῇ ἡ $A\varDelta$, καί ἐστι τῇ κατηγμένῃ παράλληλος ἡ $B\Gamma$, καὶ ἡ $B\Gamma$ ἄρα συμπεσεῖται τῇ $A\varDelta$. καὶ εἰ μὲν μεταξὺ τῶν A, $\varDelta$ σημείων, φανερόν, ὅτι καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται, εἰ δὲ ἐκτὸς τοῦ $\varDelta$ ὡς κατὰ τὸ E, πρότερον τῇ τομῇ συμπεσεῖται. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ B παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀγομένη εὐθεῖα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

κ΄.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἔσται ὡς τὰ ἀπ᾽ αὐτῶν τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπ᾽ αὐτῶν ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω τινὰ σημεῖα ἐπ᾽ αὐτῆς τὰ Γ, $\varDelta$, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, $\varDelta$ τεταγμένως κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν AB αἱ ΓE, $\varDelta Z$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως ἡ ZA πρὸς AE.

ἔστω γὰρ παρ᾽ ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ AH· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς $\varDelta Z$ τῷ ὑπὸ ZAH, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΓE τῷ ὑπὸ τῶν EAH. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως τὸ ὑπὸ ZAH πρὸς τὸ ὑπὸ EAH. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ZAH πρὸς τὸ ὑπὸ EAH, οὕτως ἡ ZA πρὸς AE· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $\varDelta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως ἡ ZA πρὸς AE.

κα΄.

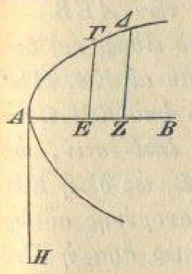
Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖαι ἀχθῶσι τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται

7. κ΄] p, om. V, m. 2 v. 25. κα΄] p, om. V, m. 2 v. 26. ἢ] (alt.) ἡ V; corr. p. περιφέρεια V; corr. p.

recta ab A rectae ordinate ductae parallela ducta extra sectionem cadit [prop XVII], et cum illa concurrit $A\varDelta$, et $B\Gamma$ rectae ordinate ductae parallela est, etiam $B\Gamma$ cum $A\varDelta$ concurret. et siue inter puncta A, $\varDelta$ concurrit, manifestum est, eam etiam cum sectione concurrere, siue extra $\varDelta$ concurrit ut in E, prius cum sectione concurret. ergo recta a B rectae ordinate ductae parallela ducta cum sectione concurret.

XX.

Si in parabola a sectione duae rectae ad diametrum ordinate ducuntur, erunt, ut quadrata earum inter se, ita rectae ab iis e diametro ad uerticem sectionis abscisae.



sit parabola, cuius diametrus sit AB, et in ea puncta aliqua sumantur Γ, $\varDelta$, et a Γ, $\varDelta$ ad AB ordinate ducantur ΓE, $\varDelta Z$. dico, esse

$$\varDelta Z^2 : \Gamma E^2 = ZA : AE.$$

sit enim parametrus AH. est igitur [prop. XI] $\varDelta Z^2 = ZA \times AH$, $\Gamma E^2 = EA \times AH$. quare

$$\varDelta Z^2 : \Gamma E^2 = ZA \times AH : EA \times AH.$$

est autem

$$ZA \times AH : EA \times AH = ZA : AE.$$

ergo etiam $\varDelta Z^2 : \Gamma E^2 = ZA : AE$.

XXI.

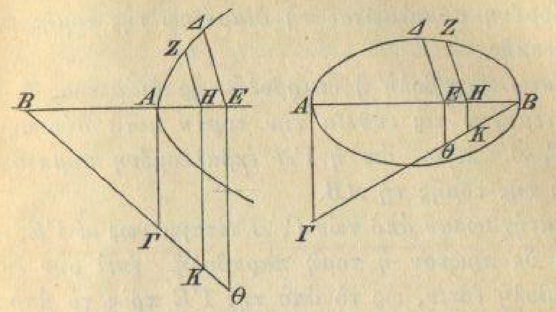
Si in hyperbola uel ellipsi uel ambitu circuli rectae ad diametrum ordinate ducuntur, quadrata earum ad spatia comprehensa rectis ab iis ad terminos lateris τὰ ἀπ' αὐτῶν τετράγωνα πρὸς μὲν τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ὑπ' αὐτῶν πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ὡς τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, πρὸς ἄλληλα δέ, ὡς τὰ περιεχόμενα χωρία ὑπὸ τῶν, ὡς εἴρηται, ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ AB, παρ' ἣν δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι ἡ $A\Gamma$, καὶ κατήχθωσαν ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως αἱ ΔE, ZH. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AHB, οὕτως ἡ $A\Gamma$ πρὸς AB, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔE, οὕτω τὸ ὑπὸ τῶν AHB πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν AEB.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $B\Gamma$ διορίζουσα τὸ εἶδος, καὶ διὰ τῶν E, H τῇ $A\Gamma$ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $E\Theta$, HK· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς ZH τῷ ὑπὸ KHA, τὸ δὲ ἀπὸ τῆς ΔE τῷ ὑπὸ ΘEA. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ KH πρὸς HB, οὕτως ἡ ΓA πρὸς AB, ὡς δὲ ἡ KH πρὸς HB, τῆς AH κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης οὕτως τὸ ὑπὸ KHA πρὸς τὸ ὑπὸ BHA, ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς AB, οὕτως τὸ ὑπὸ KHA, τουτέστι τὸ ἀπὸ ZH, πρὸς τὸ ὑπὸ BHA. διὰ τὰ αὐτὰ δή ἐστι καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ὑπὸ BEA, οὕτως ἡ ΓA πρὸς AB. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ZH πρὸς τὸ ὑπὸ BHA, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ὑπὸ BEA· ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE, οὕτως τὸ ὑπὸ BHA πρὸς τὸ ὑπὸ BEA.

2. ὑπολαμβανομένων V; corr. p. 7. ἧ] ἡ V; corr. p. ἧ] ἡ V; corr. p. 10. μέν] cp, supra scr. m. 1 V. 14. $B\Gamma$] $HB\Gamma$ V; corr. p. 16. KHA] KAH V; corr. Memus. 22. τά] om. V; corr. p. 23. ἡ] p, om. V in extr. lin. 24. πρός] π in ras. m. 1 V. 27. BEA] BE, EA V; corr. Memus.

transuersi figurae abscisis rationem habent, quam latus rectum figurae ad transuersum, inter se autem, quam spatia comprehensa rectis, uti diximus, abscisis.



sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, parametrus autem $A\Gamma$, et ad diametrum ordinate ducantur ΔE, ZH. dico, esse

$$ZH^2 : AH \times HB = A\Gamma : AB,$$
$$ZH^2 : \Delta E^2 = AH \times HB : AE \times EB.$$

ducatur enim $B\Gamma$ diagonalis figurae, et per E, H rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur $E\Theta$, HK. est igitur [prop. XII—XIII; de circulo u. Eutocius] $ZH^2 = KH \times HA$, $\Delta E^2 = \Theta E \times EA$. et quoniam est $KH : HB = \Gamma A : AB$ [Eucl. VI, 4], et AH communi altitudine sumpta

$$KH : HB = KH \times HA : BH \times HA,$$

erit

$$\Gamma A : AB = KH \times HA : BH \times HA = ZH^2 : BH \times HA.$$

iam eodem modo erit $\Delta E^2 : BE \times EA = \Gamma A : AB$. quare etiam $ZH^2 : BH \times HA = \Delta E^2 : BE \times EA$. et permutando [Eucl. V, 16]

$$ZH^2 : \Delta E^2 = BH \times HA : BE \times EA.$$

κβ'.

Ἐὰν παραβολὴν ἢ ὑπερβολὴν εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα μὴ συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐντός, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα τὰ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἐκτὸς τῆς τομῆς τῇ AB.

κατήχθωσαν ἀπὸ τῶν Γ, Δ τεταγμένως αἱ $\Gamma E, \Delta B$· ἔστω δὲ πρῶτον ἡ τομὴ παραβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ παραβολῇ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΔB, οὕτως ἡ EA πρὸς AB, μείζων δὲ ἡ AE τῆς AB, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓE τοῦ ἀπὸ τῆς ΔB. ὥστε καὶ ἡ ΓE τῆς ΔB μείζων ἐστί. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ AB διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

ἀλλὰ δὴ ἔστω ὑπερβολή. ἐπεὶ οὖν ἐν τῇ ὑπερβολῇ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $B\Delta$, οὕτως τὸ ὑπὸ ZEA πρὸς τὸ ὑπὸ ZBA, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ τῆς ΓE τοῦ ἀπὸ τῆς ΔB. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κγ'.

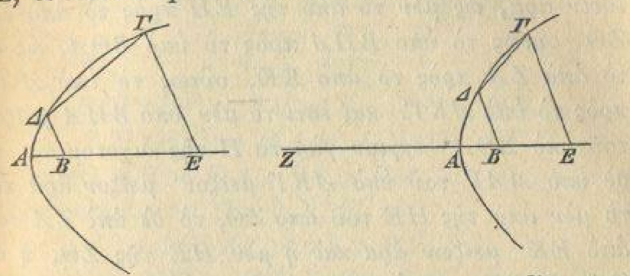
Ἐὰν ἔλλειψιν εὐθεῖα τέμνῃ μεταξὺ κειμένη τῶν δύο διαμέτρων, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

1. κβ'] p, om. V, m. 2 v. 13. AE] AB V; EA p (A e corr.). 15. ΔB] AB V; corr. p. 16. ἄρα] p, om. V. 18. Mg. m. 1 $\Delta\iota$ .... V. 24. κγ'] p, om. V, m. 2 v.

XXII.

Si recta cum diametro non concurrens intra sectionem parabolam uel hyperbolam in duobus punctis secat, producta cum diametro sectionis extra sectionem concurret.

sit parabola uel hyperbola, cuius diametrus sit AB, et recta aliqua sectionem secet in duobus punctis



Γ, Δ. dico, rectam $\Gamma\Delta$ productam cum diametro AB extra sectionem concurrere.

a Γ, Δ enim ordinate ducantur $\Gamma E, \Delta B$; prius autem sectio sit parabola. iam quoniam in parabola est $\Gamma E^2 : \Delta B^2 = EA : AB$ [prop. XX], et $AE > AB$, erit etiam $\Gamma E^2 > \Delta B^2$. quare etiam $\Gamma E > \Delta B$. et sunt parallelae; itaque $\Gamma\Delta$ producta cum diametro AB extra sectionem concurret.

iam uero sit hyperbola. quoniam igitur in hyperbola est $\Gamma E^2 : B\Delta^2 = ZE \times EA : ZB \times BA$ [prop. XXI], erit etiam $\Gamma E^2 > \Delta B^2$. et sunt parallelae; itaque $\Gamma\Delta$ producta cum diametro sectionis extra sectionem concurret.

XXIII.

Si recta ellipsim secat inter ambas diametros posita, producta cum utraque diametro extra sectionem concurret.

ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ AB, $\Gamma\Delta$, καὶ τεμνέτω τις εὐθεῖα τὴν τομὴν ἡ EZ μεταξὺ κειμένη τῶν AB, $\Gamma\Delta$ διαμέτρων. λέγω, ὅτι η EZ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν AB, $\Gamma\Delta$ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν E, Z τεταγμένως ἐπὶ μὲν τὴν AB αἱ HE, $Z\Theta$, ἐπὶ δὲ τὴν $\Delta\Gamma$ αἱ EK, $Z\Lambda$. ἔστιν ἄρα, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ τῆς EH πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $Z\Theta$, οὕτως τὸ ὑπο BHA πρὸς τὸ ὑπὸ $B\Theta A$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $Z\Lambda$ πρὸς τὸ ἀπὸ EK, οὕτως τὸ ὑπὸ $\Delta\Lambda\Gamma$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Delta K\Gamma$. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ BHA μεῖζον τοῦ ὑπὸ $B\Theta A$· ἔγγιον γὰρ τὸ H τῆς διχοτομίας· τὸ δὲ ὑπὸ $\Delta\Lambda\Gamma$ τοῦ ὑπὸ $\Delta K\Gamma$ μεῖζον· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ μὲν ἀπὸ τῆς HE τοῦ ἀπὸ $Z\Theta$, τὸ δὲ ἀπὶ $Z\Lambda$ τοῦ ἀπὸ EK· μείζων ἄρα καὶ ἡ μὲν HE τῆς $Z\Theta$, ἡ δὲ $Z\Lambda$ τῆς EK. καί ἐστι παράλληλος ἡ μὲν HE τῇ $Z\Theta$, ἡ δὲ $Z\Lambda$ τῇ EK· ἡ EZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν AB, $\Gamma\Delta$ διαμέτρων ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κδ'.

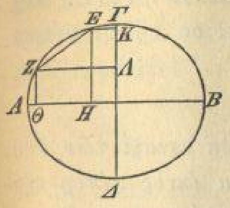
Ἐὰν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα καθ' ἓν σημεῖον συμπίπτουσα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ.

ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολή, ἧς διάμετρος η AB, καὶ συμπιπτέτω αὐτῇ εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta E$ κατὰ τὸ Δ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς· λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ AB διαμέτρῳ.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Z, καὶ

1. αἱ] p, om. V. 6. διὰ κα' τούτου τοῦ βιβλίου mg. m. 1 V. 6. $Z\Lambda$] ZN V; corr. p. 10. ἐστι] c, ἐστιν V. 11. διὰ τὸ ε' τοῦ β' στοιχ. mg. m. 1 V. 18. κδ'] p, om. V, m. 2 v.

sit ellipsis, cuius diametri sint AB, $\Gamma\Delta$, et recta EZ inter diametros AB, $\Gamma\Delta$ posita sectionem secet. dico, rectam EZ productam cum utraque diametro AB, $\Gamma\Delta$ extra sectionem concurrere.



ducantur enim ab E, Z ad AB ordinate HE, $Z\Theta$, ad $\Delta\Gamma$ autem EK, $Z\Lambda$. erit igitur [prop. XXI]

$$EH^2 : Z\Theta^2 = BH \times HA : B\Theta \times \Theta A,$$
$$Z\Lambda^2 : EK^2 = \Delta\Lambda \times \Lambda\Gamma : \Delta K : K\Gamma.$$

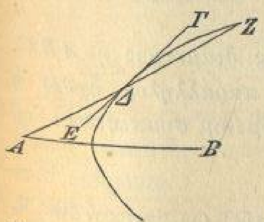
est autem $BH \times HA > B\Theta \times \Theta A$; H enim puncto medio propius est [Eucl. II, 5]; et

$$\Delta\Lambda \times \Lambda\Gamma > \Delta K \times K\Gamma \text{ [ib.].}$$

quare etiam $HE^2 > Z\Theta^2$, $Z\Lambda^2 > EK^2$. itaque etiam $HE > Z\Theta$, $Z\Lambda > EK$. et HE rectae $Z\Theta$, $Z\Lambda$ rectae EK parallela est. ergo EZ producta cum utraque diametro AB, $\Gamma\Delta$ extra sectionem concurret.

XXIV.

Si recta cum parabola uel hyperbola in uno puncto concurrens in utramque partem producta extra sectionem cadit, cum diametro concurret.



sit parabola uel hyperbola, cuius diametrus sit AB, et recta $\Gamma\Delta E$ cum ea in Δ concurrat, et in utramque partem producta extra sectionem cadat. dico, eam cum diametro AB concurrere.

sumatur enim in sectione punctum aliquod Z, et ἐπεξεύχθω ἡ ΔΖ· ἡ ΔΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Α· καί ἐστι μεταξὺ τῆς τε τομῆς καὶ τῆς ΖΔΑ ἡ ΓΔΕ. καὶ ἡ ΓΔΕ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κε'.

Ἐὰν ἐλλείψει εὐθεῖα συμπίπτουσα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν διαμέτρων.

ἔστω ἔλλειψις, ἧς διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ταύτῃ συμπιπτέτω τις εὐθεῖα μεταξὺ τῶν δύο διαμέτρων ἡ ΕΖ κατὰ τὸ Η καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΑΒ, ΓΔ.

κατήχθωσαν ἀπὸ τοῦ Η ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΓΔ τεταγμένως αἱ ΗΘ, ΗΚ. ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΚ τῇ ΑΒ, συμπέπτωκε δέ τις τῇ ΗΚ ἡ ΗΖ, καὶ τῇ ΑΒ ἄρα συμπεσεῖται. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ ΓΔ συμπεσεῖται ἡ ΕΖ.

κϛ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ἢ ὑπερβολῇ εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν διάμετρον τῆς τομῆς, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστω πρότερον παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒΓ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

---

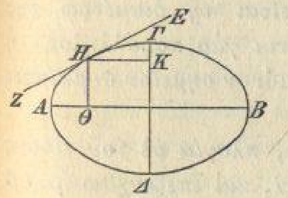
2. τῆς] ἐκτὸς τῆς Halley. 5. τῆς] om. in extr. lin. V, corr. vp. 6. κε'] p, om. V, m. 2 v. 16. ΗΚ] (pr.) p, corr. ex ΘΚ m. 1 V. 18. ἡ] p, om. V. 19. κϛ'] p, om. V, m. 2 v. 20. ἐν] addidi; om. V. 23. ἡ] p, om. V.

ducatur ΔZ. ΔZ igitur producta cum diametro sectionis concurret [prop. XXII]. concurrat in A. et $\Gamma\Delta E$ inter sectionem et rectam $Z\Delta A$ posita est. ergo etiam $\Gamma\Delta E$ producta cum diametro extra sectionem concurret.

XXV.

Si recta cum ellipsi inter ambas diametros concurrens in utramque partem producta extra sectionem cadit, cum utraque diametro concurret.

sit ellipsis, cuius diametri sint AB, $\Gamma\Delta$, et cum ea recta EZ inter ambas diametros concurrat in H et in utramque partem producta extra sectionem cadat. dico, EZ cum utraque diametro AB, $\Gamma\Delta$ concurrere.



ab H ad AB, $\Gamma\Delta$ ordinate ducantur $H\Theta$, HK. quoniam HK rectae AB parallela est, et recta aliqua HZ cum HK concurrit, etiam cum AB concurret. et eadem de causa etiam EZ cum $\Gamma\Delta$ concurret.

XXVI.

Si in parabola uel hyperbola recta diametro sectionis parallela ducitur, cum sectione in uno puncto solo concurret.

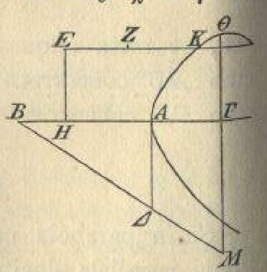
sit prius parabola, cuius diametrus sit $AB\Gamma$, latus autem rectum $A\Delta$, et rectae AB parallela ducatur EZ. dico, EZ productam cum sectione concurrere.

εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ ἀπὸ τοῦ Ε παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς ΗΕ μεῖζον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔΑΓ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΓΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΘΓ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῶν ΔΑΓ. μεῖζον δὲ τὸ ὑπο ΔΑΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΘΓ τοῦ ἀπὸ ΕΗ· μείζων ἄρα καὶ ἡ ΘΓ τῆς ΕΗ. καί εἰσι παράλληλοι· ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη τέμνει τὴν ΘΓ· ὥστε καὶ τῇ τομῇ συμπεσεῖται.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ.

λέγω δή, ὅτι καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον τὸ Κ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν παραβολὴν εὐθεῖα τέμνει κατα δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ τῆς τομῆς· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ παράλληλος. ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη καθ' ἓν μόνον σημεῖον συμπίπτει τῇ τομῇ.

ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολή, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔΒ καὶ ἐκβεβλήσθω. τῶν αὐτῶν δὴ κατασκευασθέντων ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἡ ΓΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΜΓΑ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΑΓ, καί ἐστι τῷ μὲν ὑπὸ ΜΓΑ ἴσον τὸ ἀπὸ ΓΘ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΑΓ μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΗΕ, μεῖζον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΓΘ τοῦ ἀπὸ ΕΗ. ὥστε καὶ ἡ ΓΘ τῆς ΕΗ μείζων ἐστί, καὶ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον συμβήσεται.

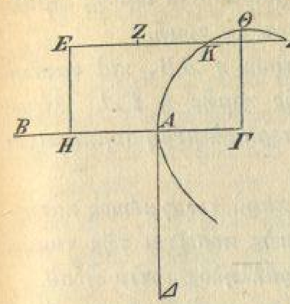


4. τοῦ] insertum m. 1 V. 10. K] Γ V; corr. p. 18. τοῦ εἴδους] cvp, ob pergam. ruptum incerta in V.

sumatur enim in EZ punctum aliquod E, et ab E rectae ordinate ductae parallela ducatur EH, et sit $\Delta A \times A\Gamma > HE^2$, a Γ autem ordinate erigatur $\Gamma\Theta$. est igitur $\Theta\Gamma^2 = \Delta A \times A\Gamma$ [prop. XI]. est autem

$$\Delta A \times A\Gamma > EH^2.$$

itaque etiam $\Theta\Gamma^2 > EH^2$; quare etiam $\Theta\Gamma > EH$. et sunt parallelae; EZ igitur producta rectam $\Theta\Gamma$ secat. ergo etiam cum sectione concurrit.



concurrat in K.

iam dico, eam etiam in solo puncto K concurrere. nam si fieri potest, etiam in Λ concurrat. quoniam igitur recta parabolam in duobus punctis secat, producta cum diametro sectionis concurret [prop. XXII]; quod fieri non potest. supposuimus enim, eas parallelas esse. ergo EZ producta in uno solo puncto cum sectione concurrit.

iam igitur sectio hyperbola sit, AB autem latus sectionis transuersum et $A\Delta$ latus rectum, ducaturque ΔB et producatur. iisdem igitur praeparatis a Γ rectae $A\Delta$ parallela ducatur ΓM. iam quoniam

$$M\Gamma \times \Gamma A > \Delta A \times A\Gamma,$$

et

$$\Gamma\Theta^2 = M\Gamma \times \Gamma A \text{ [prop. XII]},$$

$$\Delta A \times A\Gamma > HE^2,$$

erit etiam $\Gamma\Theta^2 > EH^2$. quare etiam $\Gamma\Theta > EH$, et eadem, quae antea, euenient [prop. XXII].

κζ'.

Ἐὰν παραβολῆς τὴν διάμετρον εὐθεῖα τέμνῃ, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ταύτην τεμνέτω τις εὐθεῖα ἐντὸς τῆς τομῆς ἡ $\Gamma\Delta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα τὰ μέρη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἤχθω γάρ τις ἀπὸ τοῦ A παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ AE· ἡ AE ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς. ἤτοι δὴ ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ AE παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

εἰ μὲν οὖν παράλληλός ἐστιν αὐτῇ, τεταγμένως κατῆκται, ὥστε ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

μὴ ἔστω δὴ παράλληλος τῇ AE, ἀλλ' ἐκβαλλομένη συμπιπτέτω τῇ AE κατὰ τὸ E. ὅτι μὲν οὖν τῇ τομῇ συμπίπτει ἐπὶ τὰ μέρη, ἐφ' ἅ ἐστι τὸ E, φανερόν· εἰ γὰρ τῇ AE συμβάλλει, πολὺ πρότερον τέμνει τὴν τομήν.

λέγω, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τομῇ. ἔστω γὰρ παρ' ἣν δύνανται ἡ MA καὶ τεταγμένως ἡ HZ, καὶ τὸ ἀπὸ $A\Delta$ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ BAZ, καὶ παρατεταγμένως ἡ BK συμπιπτέτω τῇ $\Delta\Gamma$ κατὰ τὸ Γ. ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ZAB τῷ ἀπὸ $A\Delta$, ἔστιν ὡς ἡ AB πρὸς $A\Delta$, ἡ ΔA πρὸς AZ· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ $B\Delta$ πρὸς λοιπὴν τὴν ΔZ ἐστιν, ὡς ἡ BA πρὸς $A\Delta$. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $B\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Delta$, οὕτως τὸ ἀπὸ BA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Delta$. ἐπειδὴ δὲ ἴσον τὸ ἀπὸ $A\Delta$ τῷ ὑπὸ BAZ,

1. κζ'] p, om. V, m. 2 v. 21. BAZ] BZA V; corr. p (τῶν BA, AZ). BK] scripsi cum Memo; ΓK V; $B\Gamma$ p; ΓB Halley, sed in fig. K habet cum V. 23. διὰ ιζ' τοῦ ϛ' στοιχ. mg. m. 1 V.

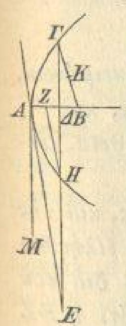
XXVII.

Si recta diametrum parabolae secat, in utramque partem producta cum sectione concurret.

sit parabola, cuius diametrus sit AB, et hanc recta aliqua $\Gamma\Delta$ intra sectionem secet. dico, $\Gamma\Delta$ in utramque partem productam cum sectione concurrere.

ducatur enim ab A rectae ordinate ductae parallela AE; AE igitur extra sectionem cadet [prop. XVII]. $\Gamma\Delta$ igitur rectae AE aut parallela est aut non parallela.

si igitur ei parallela est, ordinate ducta est; quare in utramque partem producta cum sectione concurret [prop. XIX]. ne sit igitur rectae AE parallela, et producta cum AE in E concurrat. iam igitur eam ad partes E uersus cum sectione concurrere, manifestum est; nam si cum AE concurrit, multo prius sectionem secat.



dico, eam etiam ad alteram partem productam cum sectione concurrere. sit enim MA parametrus et HZ ordinate ducta, et sit $A\Delta^2 = BA \times AZ$, et BK rectae ordinate ductae parallela concurrat cum $\Delta\Gamma$ in Γ. quoniam $ZA \times AB = A\Delta^2$, erit $AB : A\Delta = \Delta A : AZ$ [Eucl. VI, 17]. quare etiam $B\Delta : \Delta Z = BA : A\Delta$ [Eucl. V, 19]. quare etiam

$$B\Delta^2 : Z\Delta^2 = BA^2 : A\Delta^2.$$

24. διὰ ιϑ' τοῦ ε' στοιχ. mg. m. 1 V. 25. διὰ κβ' τοῦ ϛ' στοιχ. mg. m. 1 V. 27. διὰ ῑ τοῦ ιϑ' τοῦ ϛ' στοιχ. mg. m. 1 V.

ἔστιν ὡς ἡ ΒΑ πρὸς ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ ἡ ΑΒ πρὸς ΑΖ, οὕτως το ὑπὸ ΒΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ. ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΑΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ· καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΑΜ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΑΜ. τὸ δὲ ἀπο ΖΗ ἴσον τῷ ὑπὸ ΖΑΜ διὰ τὴν τομήν· καὶ τὸ ἀπὸ ΒΓ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΑΜ. πλαγία δὲ ἡ ΑΜ, παρατεταγμένως δὲ ἡ ΒΓ. ἡ ἄρα τομὴ ἔρχεται διὰ τοῦ Γ, καὶ συμπίπτει τῇ τομῇ ἡ ΓΔ κατὰ τὸ Γ.

κη'.

Ἐὰν εὐθεῖα ἐφάπτηται μιᾶς τῶν ἀντικειμένων, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος ἀχθῇ τῇ ἐφαπτομένῃ εὐθεῖα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν ἡ ΑΒ διάμετρος, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐντὸς τῆς ἑτέρας τομῆς τὸ Ε, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἡ ΓΔ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ ΑΒ διαμέτρῳ, καί ἐστι παράλληλος αὐτῇ ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ διαμέτρῳ· συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η, καὶ τῇ ΗΒ ἴση κείσθω ἡ ΑΘ, καὶ διὰ τοῦ Θ τῇ ΖΕ παράλληλος ἤχθω ἡ

1. ΑΖ] sic V, sed pro Z alia forma eiusdem litterae restituta manu 1. 2. τουτέστι — ΔΖ] bis V; corr. cp. 3. Mg. [διὰ δ'] τοῦ ς' m. 1 V. 5. ΒΑΜ], ΑΒΜ V; corr. Memus.

quoniam autem est $A\Delta^2 = BA \times AZ$, erit

$$BA : AZ = BA^2 : A\Delta^2 \text{ [Eucl. V def. 9]},$$

hoc est $BA : AZ = B\Delta^2 : \Delta Z^2$. est autem

$$B\Delta^2 : \Delta Z^2 = B\Gamma^2 : ZH^2 \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

et $AB : AZ = BA \times AM : ZA \times AM$. itaque

$$B\Gamma^2 : ZH^2 = BA \times AM : ZA \times AM.$$

et permutando [Eucl. V, 16]

$$B\Gamma^2 : BA \times AM = ZH^2 : ZA \times AM.$$

uerum propter sectionem est $ZH^2 = ZA \times AM$ [prop. XI]. quare etiam $B\Gamma^2 = BA \times AM$. uerum AM latus transuersum est et $B\Gamma$ rectae ordinate ductae parallela. ergo sectio per Γ ueniet [prop. XX], et $\Gamma\Delta$ cum sectione concurrit in Γ.

XXVIII.

Si recta alterutram oppositarum contingit et intra alteram sectionem punctum aliquod sumitur, et per id recta contingenti parallela ducitur, haec in utramque partem producta cum sectione concurret.

sint oppositae, quarum diametrus sit AB, et sectionem A contingat recta $\Gamma\Delta$, et intra alteram sectionem punctum aliquod E sumatur, et per E rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur EZ. dico, EZ in utramque partem productam cum sectione concurrere.

quoniam igitur demonstrauimus, $\Gamma\Delta$ productam cum diametro AB concurrere [prop. XXIV], eique parallela est EZ, EZ producta cum diametro concurret; concurrat in H, et ponatur $A\Theta = HB$, et per Θ rectae ZE parallela ducatur ΘK, ordinateque ducatur

8. πρός — ΖΗ] bis V; corr. p. 11. [διὰ] κ' τού[του τοῦ βιβλίου] mg. m. 1 V. 13. κη'] p, om. V, m. 2 v.

ΘΚ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ, καὶ τῇ ΛΘ ἴση κείσθω η ΗΜ, καὶ παρατεταγμένως ἤχθω ἡ ΜΝ, καὶ προσεκβεβλήσθω ἐπ' εὐθείας ἡ ΗΝ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ, ἡ δὲ ΚΘ τῇ ΗΝ, καὶ μία εὐθεῖά ἐστιν ἡ ΛΜ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΘΛ τρίγωνον τῷ ΗΜΝ τριγώνῳ. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΛ τῇ ΜΝ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ἀπὸ ΜΝ ἴσον ἐστί. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΘ τῇ ΗΜ, ἡ δὲ ΛΘ τῇ ΒΗ, κοινὴ δὲ ἡ ΑΒ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΛ τῇ ΑΜ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΒΛΑ τῷ ὑπὸ ΑΜΒ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ. καί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΜΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΝ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. τὸ Ν ἄρα πρὸς τῇ τομῇ ἐστιν. ἡ ΕΖ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ κατὰ τὸ Ν.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, ὅτι καὶ ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

κθ'.

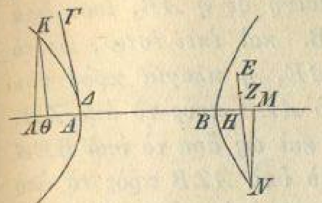
Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις εὐθεῖα προσπίπτῃ διὰ τοῦ κέντρου πρὸς ὁποτέραν τῶν τομῶν, ἐκβαλλομένη τεμεῖ τὴν ἑτέραν τομήν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἡ ΓΔ τεμνέτω τὴν ΑΔ τομήν. λέγω, ὅτι καὶ τὴν ἑτέραν τομὴν τεμεῖ.

---

1. ΚΛ] cvp, ΘΚ e corr. m. 1 V. 9. ΒΗ] c, Β e corr. m. 1 V. 11. ΒΛΑ] ΒΑΛ V; corr. p (ΒΛ, ΛΑ). ΒΛΑ] ΒΑΛ V; corr. p (τῶν ΒΛ, ΛΑ). 20. κθ'] p, om. V, m. 2 v. 21. διά] euan. V. 22. τέμει V; corr. p.

$K\Lambda$, et ponatur $HM = \Lambda\Theta$, et rectae ordinate ductae parallela ducatur MN, et in directum producatur EH, ut fiat HN. iam quoniam $K\Lambda$ rectae MN, $K\Theta$ rectae HN parallela est, et ΛM una est recta, erit



$$K\Theta\Lambda \sim HMN.$$

et $\Lambda\Theta = HM$; quare

$$K\Lambda = MN$$

[Eucl. VI, 4]. quare etiam $K\Lambda^2 = MN^2$. et quoniam $\Lambda\Theta = HM$, $\Lambda\Theta = BH$, et AB communis est, erit $B\Lambda = AM$. itaque erit

$$B\Lambda \times \Lambda A = AM \times MB.$$

quare

$$B\Lambda \times \Lambda A : K\Lambda^2 = AM \times MB : MN^2.$$

est autem ut $B\Lambda \times \Lambda A$ ad ΛK^2, ita latus transuersum ad latus rectum [prop. XXI]. quare etiam ut

$$AM \times MB : MN^2,$$

ita latus transuersum ad latus rectum. ergo N in sectione est [ib.]. ergo EZ producta cum sectione in N concurret.

iam similiter demonstrabimus, eam etiam ad alteram partem productam cum sectione concurrere.

XXIX.

Si in oppositis recta per centrum ad utramuis sectionum adcidit, producta alteram sectionem secabit.

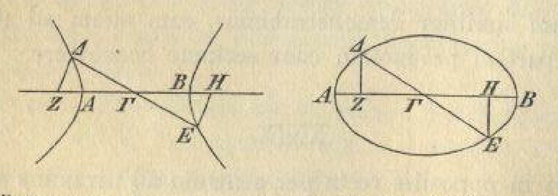
sint oppositae, quarum diametrus sit AB, centrum autem Γ, et $\Gamma\Delta$ sectionem $A\Delta$ secet. dico, eam etiam alteram sectionem secaturam esse.

τεταγμένως γὰρ κατήχθω ἡ $EΔ$, καὶ τῇ AE ἴση κείσθω ἡ BZ, καὶ τεταγμένως ἤχθω ἡ ZH. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ EA τῇ BZ, κοινὴ δὲ ἡ AB, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ BEA τῷ ὑπὸ AZB. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ BEA πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔE$, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ἀπὸ ZH, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ BEA πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔE$, οὕτως τὸ ὑπὸ AZB πρὸς τὸ ἀπὸ ZH. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ BEA τῷ ὑπὸ AZB· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ $EΔ$ τῷ ἀπὸ ZH. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ μὲν $EΓ$ τῇ $ΓZ$, ἡ δὲ $ΔE$ τῇ ZH, καὶ εὐθεῖά ἐστιν ἡ EZ, καὶ παράλληλος ἡ $EΔ$ τῇ ZH, καὶ ἡ $ΔH$ ἄρα εὐθεῖά ἐστι. καὶ ἡ $ΓΔ$ ἄρα τεμεῖ καὶ τὴν ἑτέραν τομήν.

λ΄.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ ἀντικειμέναις εὐθεῖα ἀχθῇ ἐφ᾽ ἑκάτερα τοῦ κέντρου συμπίπτουσα τῇ τομῇ, δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ κέντρον.

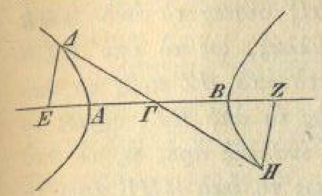
ἔστω ἔλλειψις ἢ ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ $Γ$, καὶ διὰ τοῦ $Γ$ ἤχθω τις εὐθεῖα ἡ $ΔΓE$. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $ΓΔ$ τῇ $ΓE$.



ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ $ΔZ$, EH. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ BZA πρὸς τὸ ἀπὸ $ZΔ$, ἡ πλαγία

6. ἀλλά — 7. ὀρθίαν] om. V; corr. Memus; cfr. p. 92, 1. 10. ἀπό] (pr.) ὑπό V; corr. p. 14. λ΄] p, om. V, m. 2 v.

ordinate enim ducatur $EΔ$, et ponatur $BZ = AE$, ordinateque ducatur ZH. iam quoniam est $EA = BZ$,



et AB communis est, erit $BE \times EA = AZ \times ZB$. et quoniam est, ut $BE \times EA : ΔE^2$, ita latus transuersum ad latus rectum, uerum etiam ut $AZ \times ZB : ZH^2$, ita latus transuersum ad latus rectum [prop. XXI], erit etiam

$$BE \times EA : ΔE^2 = AZ \times ZB : ZH^2.$$

est autem $BE \times EA = AZ \times ZB$. quare etiam $EΔ^2 = ZH^2$ [Eucl. V, 9].

quoniam igitur est $EΓ = ΓZ$, $ΔE = ZH$, et EZ recta est, et $EΔ$ rectae ZH parallela, etiam $ΔH$ recta est [cfr. Eucl. VI, 32]. ergo etiam $ΓΔ$ alteram quoque sectionem secabit.

XXX.

Si in ellipsi uel oppositis recta ducitur ad utramque partem centri cum sectione concurrens, in centro in duas partes aequales secabitur.

sint ellipsis uel oppositae, earumque diametrus AB, centrum autem $Γ$, et per $Γ$ recta ducatur $ΔΓE$. dico, esse $ΓΔ = ΓE$.

ordinate enim ducantur $ΔZ$, EH. et quoniam est, ut $BZ \times ZA : ZΔ^2$, ita latus transuersum ad latus rectum, uerum etiam ut $AH \times HB : HE^2$, ita latus transuersum ad latus rectum [prop. XXI], erit πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἀλλὰ καὶ ὡς τὸ ὑπὸ AHB πρὸς τὸ ἀπὸ HE, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $BZ\varDelta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\varDelta$, οὕτως τὸ ὑπὸ AHB πρὸς τὸ ἀπὸ HE. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ $BZ\varDelta$ πρὸς τὸ ὑπὸ AHB, οὕτως τὸ ἀπὸ $\varDelta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ HE. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $\varDelta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ HE, οὕτως τὸ ἀπὸ $Z\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH· ἐναλλὰξ ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ $BZ\varDelta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Gamma$, οὕτως τὸ ὑπὸ AHB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH. καὶ ὡς ἄρα ἐπὶ μὲν τῆς ἐλλείψεως συνθέντι, ἐπὶ δὲ τῶν ἀντικειμένων ἀνάπαλιν καὶ ἀναστρέψαντι τὸ ἀπὸ $A\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓZ, οὕτως τὸ ἀπὸ $B\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓH· καὶ ἐναλλάξ. ἴσον δὲ τῷ ἀπὸ $A\Gamma$ τὸ ἀπὸ ΓB· ἴσον ἄρα καὶ τῷ ἀπὸ $Z\Gamma$ τὸ ἀπὸ ΓH. ἴση ἄρα ἡ $Z\Gamma$ τῇ ΓH. καί εἰσι παράλληλοι αἱ $\varDelta Z$, HE· ἴση ἄρα καὶ ἡ $\varDelta\Gamma$ τῇ ΓE.

λα'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς τοῦ εἴδους ληφθῇ τι σημεῖον μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους πλευρᾶς, καὶ ἀπ' αὐτοῦ προσπέσῃ εὐθεῖα πρὸς τὴν τομήν, προσεκβληθεῖσα ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς κατὰ τὰ ἑπόμενα μέρη τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ εἰλήφθω ἐπ' αὐτῆς σημεῖον ὄν τι τὸ Γ μὴ ἐλάττονα ἀπολαμβάνον τὴν ΓB τῆς ἡμισείας τῆς AB, καὶ προσπιπτέτω τις εὐθεῖα πρὸς τὴν τομὴν ἡ $\Gamma\varDelta$. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\varDelta$ ἐκβαλλομένη ἐντὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

11. τό] (pr.) ὡς τό V; corr. p. Ante $A\Gamma$ del. 1 litt. m. 1 V; $A\Gamma$ cp. ΓZ — 12. ἀπό (pr.)] bis V; corr. vp. 12. καὶ ἐναλλάξ] om. p, del. Halley. 16. λα'] p, om. V, m. 2 v. 21. προσεκβληθεῖσα] scripsi; ἡ προσβληθεῖσα V.

etiam $BZ \times Z\varDelta : Z\varDelta^2 = AH \times HB : HE^2$. et permutando [Eucl. V, 16]

$$BZ \times Z\varDelta : AH \times HB = \varDelta Z^2 : HE^2.$$

est autem

$$\varDelta Z^2 : HE^2 = Z\Gamma^2 : \Gamma H^2 \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

permutando igitur

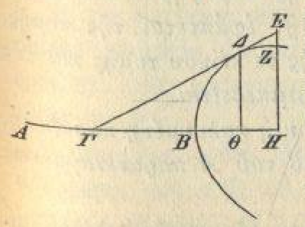
$BZ \times Z\varDelta : Z\Gamma^2 = AH \times HB : \Gamma H^2$ [Eucl. V, 16]. quare etiam, in ellipsi componendo [Eucl. V, 18], in oppositis autem e contrario [Eucl. V, 7 coroll.] et conuertendo [Eucl. V, 19 coroll.],

$$A\Gamma^2 : \Gamma Z^2 = B\Gamma^2 : \Gamma H^2$$

[Eucl. II, 5]; et permutando. est autem $\Gamma B^2 = A\Gamma^2$. quare etiam $\Gamma H^2 = Z\Gamma^2$. itaque $Z\Gamma = \Gamma H$. et $\varDelta Z$, HE parallelae sunt. ergo etiam $\varDelta\Gamma = \Gamma E$ [Eucl. VI, 4].

XXXI.

Si in hyperbola in latere transuerso figurae punctum sumitur ad uerticem sectionis rectam abscindens non minorem dimidio latere transuerso figurae, et ab eo recta ad sectionem adcidit, haec producta intra sectionem cadet ad partes eius sequentes.



sit hyperbola, cuius diametrus sit AB, et in ea punctum aliquod Γ sumatur abscindens ΓB non minorem dimidia AB, et ad sectionem adcidat recta $\Gamma\varDelta$. dico, $\Gamma\varDelta$ productam intra sectionem cadere.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς ὡς ἡ $\Gamma\Delta E$, καὶ ἀπὸ τυχόντος σημείου τοῦ E τεταγμένως κατήχθω ἡ EH, καὶ ἡ $\Delta\Theta$, καὶ ἔστω πρότερον ἴση ἡ $A\Gamma$ τῇ ΓB. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ EH πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\Theta$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\Theta$, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ EH πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\Theta$, οὕτως τὸ ἀπὸ $H\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Theta$ διὰ τὸ παράλληλον εἶναι τὴν EH τῇ $\Delta\Theta$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ $\Delta\Theta$, οὕτως τὸ ὑπὸ AHB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Theta B$ διὰ τὴν τομήν, τὸ ἄρα ἀπὸ $H\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Theta$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ υπο AHB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Theta B$. ἐναλλὰξ ἄρα τὸ ἀπὸ ΓH πρὸς τὸ ὑπὸ AHB μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ $\Gamma\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Theta B$. διελόντι ἄρα τὸ ἀπὸ ΓB πρὸς τὸ ὑπὸ AHB μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Theta B$· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ $\Gamma\Delta E$ ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς· ἐντὸς ἄρα. καὶ διὰ τοῦτο ἡ ἀπό τινος τῶν ἐπὶ τῆς $A\Gamma$ σημείων πολλῷ μᾶλλον ἐντὸς πεσεῖται, ἐπειδὴ καὶ τῆς $\Gamma\Delta$ ἐντὸς πεσεῖται.

λβʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς διὰ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἀχθῇ, ἐφάπτεται τῆς τομῆς, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε κώνου τομῆς καὶ τῆς εὐθείας ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

ἔστω κώνου τομὴ πρότερον ἡ καλουμένη παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἀπὸ τοῦ A παρατεταγμένως ἤχθω ἡ $A\Gamma$.

ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται.

5. ἀπό] (alt.) om. V; corr. p. 9. AHB] c, B e corr. m. 1 V. 11. τό] (pr.) τὸ ὑπὲρ τό V; corr. p. $A\Theta B$] c, B e corr. m. 1 V. 20. λβʹ] p, om. V, m. 2 v.

nam si fieri potest, extra sectionem cadat ut $\Gamma\Delta E$, et a puncto aliquo E ordinate ducatur EH, et item ducatur $\Delta\Theta$, et prius sit $A\Gamma = \Gamma B$. quoniam igitur est

$$EH^2 : \Delta\Theta^2 > ZH^2 : \Delta\Theta^2 \text{ [Eucl. V, 8]},$$

est autem

$$EH^2 : \Delta\Theta^2 = H\Gamma^2 : \Gamma\Theta^2,$$

quia EH, $\Delta\Theta$ parallelae sunt [Eucl. VI, 4], et

$$ZH^2 : \Delta\Theta^2 = AH \times HB : A\Theta \times \Theta B$$

propter sectionem [prop. XXI], erit

$$H\Gamma^2 : \Gamma\Theta^2 > AH \times HB : A\Theta \times \Theta B.$$

permutando igitur

$$\Gamma H^2 : AH \times HB > \Gamma\Theta^2 : A\Theta \times \Theta B.$$

dirimendo igitur $\Gamma B^2 : AH \times HB > \Gamma B^2 : A\Theta \times \Theta B$ [u. Eutocius]; quod fieri non potest [Eucl. V, 8]. ergo $\Gamma\Delta E$ extra sectionem non cadet; intra igitur. qua de causa recta a puncto aliquo rectae $A\Gamma$ ducta multo magis intra sectionem cadet, quoniam etiam intra $\Gamma\Delta$ cadet.

XXXII.

Si per uerticem sectionis coni recta rectae ordinate ductae parallela ducitur, sectionem contingit, nec in spatium inter sectionem coni et rectam positum alia recta incidet.

prius coni sectio sit parabola, quae uocatur, cuius diametrus sit AB, et ab A rectae ordinate ductae parallela ducatur $A\Gamma$.

iam eam extra sectionem cadere, demonstrauimus [prop. XVII]. dico igitur, in spatium inter rectam $A\Gamma$ et sectionem positum nullam aliam rectam incidere.

λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς $A\Gamma$ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ $A\varDelta$, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ $\varDelta$, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ $\varDelta E$, καὶ ἔστω παρ' ἣν δύνανται αἱ καταγόμεναι τεταγμένως ἡ AZ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ HE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ δὲ ἀπὸ HE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ZAE, καὶ τὸ ἀπὸ $\varDelta E$ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ EA μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ZAE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τουτέστιν ἡ ZA πρὸς AE. πεποιήσθω οὖν, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, οὕτως ἡ ZA πρὸς $A\Theta$, καὶ διὰ τοῦ Θ παράλληλος ἤχθω τῇ $E\varDelta$ ἡ $\Theta \varLambda K$. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, ἡ ZA πρὸς $A\Theta$, τουτέστι τὸ ὑπὸ $ZA\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Theta$, καί ἐστιν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, οὕτως τὸ ἀπὸ $K\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA, τῷ δὲ ὑπὸ $ZA\Theta$ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ $\Theta\varLambda$, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $K\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA, οὕτως τὸ ἀπὸ $\varLambda\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA. ἴση ἄρα ἡ $K\Theta$ τῇ $\Theta\varLambda$· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς $A\Gamma$ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

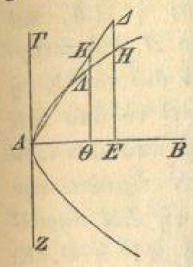
ἔστω δὴ ἡ τομὴ ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, ὀρθία δὲ ἡ AZ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ BZ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἀπὸ τοῦ A παρατεταγμένως ἤχθω ἡ $A\Gamma$.

ὅτι μὲν οὖν ἐκτὸς πίπτει τῆς τομῆς, δέδεικται.

---

7. μείζονα — 8. EA] om. V; corr. p (τῆς HE et τῆς EA). 11. πεποιείσθω V; corr. p. 13. $E\varDelta$] $E\Theta$ V; corr. p. 18. τό] (pr.) τῷ V; corr. p. 23. ἤ] ἡ V; corr. p. ἤ] ἡ V; corr. p.

nam si fieri potest, incidat ut $A\varDelta$, et in ea sumatur punctum aliquod $\varDelta$, et ordinate ducatur $\varDelta E$, parametrus autem rectarum ordinate ductarum sit AZ. et quoniam est



$\varDelta E^2 : EA^2 > HE^2 : EA^2$ [Eucl. V, 8], et $HE^2 = ZA \times AE$ [prop. XI], erit etiam

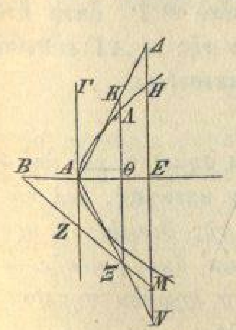
$$\varDelta E^2 : EA^2 > ZA \times AE : EA^2,$$

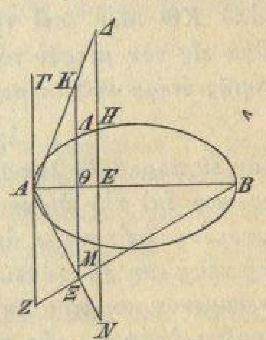
hoc est $\varDelta E^2 : EA^2 > ZA : AE$. fiat igitur $\varDelta E^2 : EA^2 = ZA : A\Theta$, et per Θ rectae $E\varDelta$ parallela ducatur $\Theta\varLambda K$. quoniam igitur est $\varDelta E^2 : EA^2 = ZA : A\Theta = ZA \times A\Theta : A\Theta^2$, est autem [Eucl. VI, 4] $\varDelta E^2 : EA^2 = K\Theta^2 : \Theta A^2$, et

$$ZA \times A\Theta = \Theta\varLambda^2 \text{ [prop. XI]},$$

erit etiam $K\Theta^2 : \Theta A^2 = \varLambda\Theta^2 : \Theta A^2$. quare $K\Theta = \Theta\varLambda$ [Eucl. V, 9]; quod absurdum est. ergo in spatium inter rectam $A\Gamma$ et sectionem positum nulla recta alia incidet.

iam sit sectio hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, latus autem rectum





AZ, et ducta BZ producatur, ab A autem rectae ordinate ductae parallela ducatur $A\Gamma$.

λέγω δή, ὅτι καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς $A\Gamma$ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ $A\Delta$, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τυχὸν τὸ Δ, καὶ τεταγμένως ἀπ' αὐτοῦ κατήχθω ἡ ΔE, καὶ διὰ τοῦ E τῇ AZ παράλληλος ἤχθω ἡ EM. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ HE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AEM, πεποιήσθω τῷ ἀπὸ ΔE ἴσον τὸ ὑπὸ AEN, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ AN τεμνέτω τὴν ZM κατὰ τὸ Ξ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ξ τῇ ZA παράλληλος ἤχθω ἡ $\Xi\Theta$, διὰ δὲ τοῦ Θ τῇ $A\Gamma$ ἡ ΘAK. ἐπεὶ οὖν τὸ ἀπὸ ΔE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπο AEN, ἔστιν ὡς ἡ NE πρὸς $E\Delta$, ἡ ΔE πρὸς EA· καὶ ὡς ἄρα ἡ NE πρὸς EA, τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ NE πρὸς EA, ἡ $\Xi\Theta$ πρὸς ΘA, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ ἀπὸ $K\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA. ὡς ἄρα ἡ $\Xi\Theta$ πρὸς ΘA, τὸ ἀπὸ $K\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘA· μέση ἄρα ἀνάλογόν ἐστιν ἡ $K\Theta$ τῶν $\Xi\Theta A$. τὸ ἄρα ἀπὸ ΘK ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $A\Theta\Xi$· ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ $A\Theta$ τῷ ὑπὸ $A\Theta\Xi$ ἴσον διὰ τὴν τομήν· τὸ ἄρα ἀπὸ $K\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΘA· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε $A\Gamma$ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

λγ'.

Ἐὰν ἐν παραβολῇ ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ, καὶ τῇ ἀπολαμβανομένῃ ὑπ' αὐτῆς ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τεθῇ ἴση ἐπ' εὐθείας ἀπ' ἄκρας αὐτῆς, ἡ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη ἐφάψεται τῆς τομῆς.

7. πεποιείσθω V; corr. p. τῷ] cvp, corr. ex τό m. 1 V. 23. λγ'] p, om. V, m. 2 v.

iam igitur eam extra sectionem cadere, demonstratum est [prop. XVII; Eucl. III, 16]. dico etiam, in spatium inter rectam $A\Gamma$ et sectionem positum nullam aliam rectam incidere.

nam si fieri potest, incidat ut $A\Delta$, et in ea punctum aliquod sumatur Δ, et ab eo ordinate ducatur ΔE, per E autem rectae AZ parallela ducatur EM. et quoniam est $HE^2 = AE \times EM$ [prop. XII—XIII], fiat $AE \times EN = \Delta E^2$, et ducta AN rectam ZM in Ξ secet, et per Ξ rectae ZA parallela ducatur $\Xi\Theta$, per Θ autem rectae $A\Gamma$ parallela ΘAK. quoniam igitur $\Delta E^2 = AE \times EN$, erit $NE : E\Delta = \Delta E : EA$ [Eucl. VI, 17]; quare etiam $NE : EA = \Delta E^2 : EA^2$. uerum $NE : EA = \Xi\Theta : \Theta A$, $\Delta E^2 : EA^2 = K\Theta^2 : \Theta A^2$ [Eucl. VI, 4]. itaque $\Xi\Theta : \Theta A = K\Theta^2 : \Theta A^2$. media igitur proportionalis est $K\Theta$ inter $\Xi\Theta$, ΘA. itaque [Eucl. VI, 17] $\Theta K^2 = A\Theta \times \Theta\Xi$. est autem etiam propter sectionem [prop. XII—XIII] $A\Theta^2 = A\Theta \times \Theta\Xi$. quare erit $K\Theta^2 = A\Theta^2$; quod absurdum est. ergo in spatium inter rectam $A\Gamma$ et sectionem alia recta non incidet.

XXXIII.

Si in parabola punctum aliquod sumitur, et ab eo ad diametrum recta ordinate ducitur, et rectae ab ea de diametro ad uerticem abscisae aequalis recta a termino eius in directum ponitur, recta a puncto ita orto ad sumptum punctum ducta sectionem continget.

sit parabola, cuius diametrus sit AB, et ordinate ducatur $\Gamma\Delta$, ponaturque $AE = E\Delta$, et ducatur $A\Gamma$. dico, $A\Gamma$ productam extra sectionem cadere.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓΔ, καὶ τῇ ΕΔ ἴση κείσθω ἡ ΑΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΑΓ ἐκβαλλομένη ἐκτὸς πεσεῖται τῆς τομῆς.

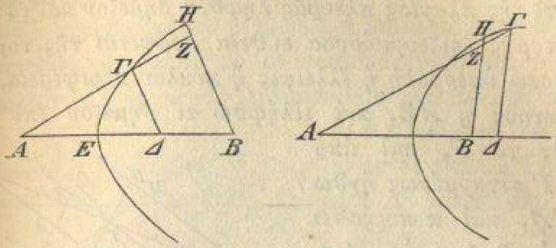
εἰ γὰρ δυνατόν, πιπτέτω ἐντὸς ὡς ἡ ΓΖ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ τὸ ἀπὸ ΒΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΖΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΗΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ἡ ΒΕ πρὸς ΔΕ, ἡ ΒΕ ἄρα πρὸς ΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἀλλ᾽ ὡς ἡ ΒΕ πρὸς ΕΔ, τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ· καὶ τὸ τετράκις ἄρα ὑπὸ τῶν ΒΕΑ πρὸς τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΒΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ. ἐναλλὰξ ἄρα τὸ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΔ· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον· ἴσης γὰρ οὔσης τῆς ΑΕ τῇ ΕΔ τὸ τετράκις ὑπὸ ΑΕΔ τῷ ἀπὸ ΑΔ ἐστιν ἴσον, τὸ δὲ τετράκις ὑπὸ ΒΕΑ τοῦ ἀπὸ ΒΑ ἐστιν ἔλασσον· τῆς γὰρ ΑΒ οὐκ ἔστι διχοτομία τὸ Ε σημεῖον. οὐκ ἄρα ἡ ΑΓ ἐντὸς πίπτει τῆς τομῆς· ἐφάπτεται ἄρα.

λδ΄.

Ἐὰν ἐπὶ ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, καὶ ὃν ἔχουσι λόγον πρὸς ἀλλήλας αἱ ἀποτεμνόμεναι ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τοῖς πέρασι τῆς πλαγίας τοῦ εἴδους

12. τό] (alt.) om. V; corr. p. 14. ὑπό] (alt.) ἄρα ὑπό V; corr. p. 20. τράκις V; corr. cp. 22. ἐντός] ἐκτός V; corr. p. 24. λδ΄] p, om. V, m. 2 v.

nam si fieri potest, cadat intra ut ΓZ, et ordinate ducatur HB. et quoniam est $BH^2 : \Gamma\Delta^2 > ZB^2 : \Gamma\Delta^2$



[Eucl. V, 8], est autem $ZB^2 : \Gamma\Delta^2 = BA^2 : A\Delta^2$ [Eucl. VI, 4], $HB^2 : \Gamma\Delta^2 = BE : \Delta E$ [prop. XX], erit

$$BE : E\Delta > BA^2 : A\Delta^2.$$

est autem

$$BE : E\Delta = 4BE \times EA : 4AE \times E\Delta.$$

quare etiam

$$4BE \times EA : 4AE \times E\Delta > BA^2 : A\Delta^2.$$

permutando igitur

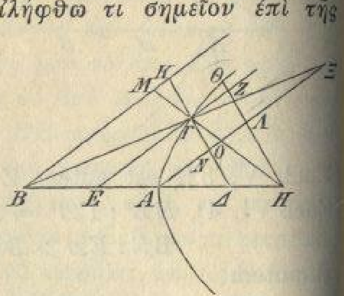
$$4BE \times EA : AB^2 > 4AE \times E\Delta : A\Delta^2;$$

quod fieri non potest; nam quoniam est $AE = E\Delta$, erit $4AE \times E\Delta = A\Delta^2$; est autem $4BE \times EA < BA^2$ [Eucl. II, 5]; neque enim E medium punctum est. itaque $A\Gamma$ intra sectionem non cadit. ergo contingit.

XXXIV.

Si in hyperbola uel ellipsi uel ambitu circuli punctum sumitur, et ab eo recta ordinate ad diametrum ducitur, et quam rationem habent inter se rectae ab ordinate ducta ad terminos lateris transuersi figurae abscisae, eam habent partes lateris transuersi, ita ut πλευρᾶς, τοῦτον ἔχῃ τὰ τμήματα τῆς πλαγίας πλευρᾶς, ὥστε ὁμόλογα εἶναι τὰ πρὸς τῇ κορυφῇ τμήματα, ἡ τὸ ἐπὶ τῆς πλαγίας πλευρᾶς ληφθὲν σημεῖον καὶ τὸ ἐπὶ τῆς τομῆς ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΓ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

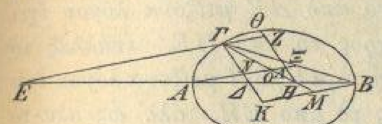


εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτω ὡς ἡ ΕΓΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπ' αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΖΘ, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν Α, Β τῇ ΕΓ παράλληλοι αἱ ΑΛ, ΒΚ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ ΔΓ, ΒΓ, ΗΓ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Μ, Ξ, Κ σημεῖα. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΕ πρὸς ΕΑ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΒΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως ἡ ΒΚ πρὸς ΑΝ, ὡς δὲ ἡ ΒΕ πρὸς ΑΕ, οὕτως ἡ ΒΓ πρὸς ΓΞ, τουτέστιν ἡ ΒΚ πρὸς ΞΝ, ὡς ἄρα ἡ ΒΚ πρὸς ΑΝ, ἡ ΒΚ πρὸς ΝΞ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΝ τῇ ΝΞ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΝΞ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΑΟΞ. ἡ ΝΞ ἄρα πρὸς ΞΟ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. ἀλλ' ὡς ἡ ΝΞ πρὸς ΞΟ, ἡ ΚΒ πρὸς ΒΜ· ἡ ΚΒ ἄρα πρὸς ΒΜ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΑ πρὸς ΑΝ. τὸ ἄρα ὑπὸ ΚΒ, ΑΝ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΜΒ, ΑΟ. ὥστε τὸ

5. ἢ] ἡ V; corr. p. ἢ] ἡ V; corr. p. 9. πεποιείσθω V; corr. p. 17. ΗΖΘ] ΗΞΘ V; corr. Memus; ΘΖΗ p.

partes ad uerticem positae inter se respondeant, recta punctum in latere transuerso sumptum punctumque in sectione sumptum coniungens sectionem continget.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, et in sectione punctum aliquod sumatur Γ, et a Γ ordinate ducatur $\Gamma\Delta$, et fiat
$$B\Delta : \Delta A = BE : EA,$$
ducaturque $E\Gamma$. dico, ΓE sectionem contingere.



nam si fieri potest, secet ut $E\Gamma Z$, et in ea punctum aliquod sumatur Z, ordinateque ducatur $HZ\Theta$, et per A, B rectae $E\Gamma$ parallelae ducantur $A\Lambda$, BK, et ductae $\Delta\Gamma$, $B\Gamma$, $H\Gamma$ ad puncta M, Ξ, K producantur. et quoniam est
$$B\Delta : \Delta A = BE : EA,$$
est autem etiam
$$B\Delta : \Delta A = BK : AN \text{ [Eucl. VI, 4]},$$
et [Eucl. VI, 2]
$$BE : AE = B\Gamma : \Gamma\Xi = BK : \Xi N \text{ [Eucl. VI, 4]},$$
erit
$$BK : AN = BK : N\Xi.$$
itaque $AN = N\Xi$ [Eucl. V, 9]. quare
$$AN \times N\Xi > AO \times O\Xi \text{ [Eucl. II, 5]}.$$
itaque $N\Xi : \Xi O > OA : AN$ [u. Eutocius]. est autem
$$N\Xi : \Xi O = KB : BM \text{ [Eucl. VI, 4]}.$$
itaque $KB : BM > OA : AN$. quare
$$KB \times AN > MB \times AO.$$
itaque $KB \times AN : \Gamma E^2 > MB \times AO : \Gamma E^2$ [Eucl. V, 8].

19. K, Ξ, M Halley. 25. ἡ ΝΞ] ἡν ξο̄ V, sed ο del. m. 1; corr. cp.

ὑπὸ KB, AN πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ MB, AO πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ KB, AN πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως τὸ ὑπὸ BΔA πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν BKΔ, EΓΔ, NAΔ τριγώνων, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ MB, AO πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως ἐστὶ τὸ ὑπὸ BHA πρὸς τὸ ἀπὸ HE· τὸ ἄρα ὑπὸ BΔA πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ BHA πρὸς τὸ ἀπὸ HE. ἐναλλὰξ τὸ ἄρα ὑπὸ BΔA πρὸς τὸ ὑπὸ AH, BH μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EH. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ὑπὸ BΔA πρὸς τὸ ὑπὸ AHB, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ HΘ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EH, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH· καὶ τὸ ἀπὸ ΓΔ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ ΘH μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΓΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ZH. ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ ΘH τῆς ZH· ὅπερ ἐστὶν ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ EΓ τέμνει τὴν τομήν· ἐφάπτεται ἄρα.

λε'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται συμπίπτουσα τῇ διαμέτρῳ ἐκτὸς τῆς τομῆς, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα ἀχθεῖσα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον ἴσην ἀπολήψεται ἀπὸ τῆς διαμέτρου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς τῇ μεταξὺ αὐτῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

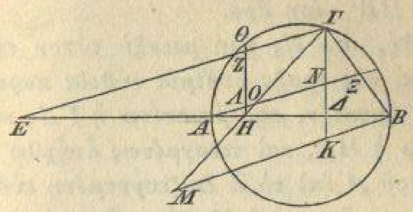
ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ BΓ, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ AΓ. λέγω, ὅτι ἡ AH ἴση ἐστὶ τῇ HB.

13. ZH — 14. ἀπό] bis V; corr. p. 18. λε'] p, om. V, m. 2 v. 23. αὐτῆς] αὐτῇ V; corr. p.

est autem propter similitudinem triangulorum $BK\Delta$, $E\Gamma\Delta$, $NA\Delta$ [u. Eutocius]

$$KB \times AN : \Gamma E^2 = B\Delta \times \Delta A : \Delta E^2,$$

et $MB \times AO : \Gamma E^2 = BH \times HA : HE^2$. itaque erit $B\Delta \times \Delta A : \Delta E^2 > BH \times HA : HE^2$. permutando



igitur $B\Delta \times \Delta A : BH \times HA > \Delta E^2 : EH^2$. est autem $B\Delta \times \Delta A : BH \times HA = \Gamma\Delta^2 : H\Theta^2$ [prop. XXI] et $\Delta E^2 : EH^2 = \Gamma\Delta^2 : ZH^2$ [Eucl. VI, 4]. itaque etiam $\Gamma\Delta^2 : \Theta H^2 > \Gamma\Delta^2 : ZH^2$. quare $\Theta H < ZH$ [Eucl. V, 8]; quod fieri non potest. ergo $E\Gamma$ sectionem non secat; contingit igitur.

XXXV.

Si parabolam recta contingit cum diametro extra sectionem concurrens, recta a puncto contactus ad diametrum ordinate ducta de diametro ad uerticem sectionis rectam abscindet aequalem rectae inter eum contingentemque positae, et in spatium inter contingentem et sectionem positum nulla recta incidet.

sit parabola, cuius diametrus sit AB, et ordinate ducatur $B\Gamma$, contingatque sectionem $A\Gamma$. dico, esse $AH = HB$.

nam si fieri potest, sit inaequalis, et ponatur $HE = AH$, ducaturque ordinate EZ, et ducatur AZ. AZ igitur εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἄνισος αὐτῇ, καὶ τῇ ΔH ἴση κείσθω ἡ HE, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ EZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔZ. ἡ ΔZ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ $A\Gamma$ εὐθείᾳ· ὅπερ ἀδύνατον· δυεῖν γὰρ ἔσται εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΔH τῇ HB· ἴση ἄρα.

λέγω δή, ὅτι εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε $A\Gamma$ εὐθείας καὶ τῆς τομῆς οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

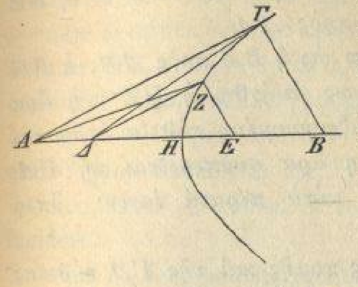
εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τῇ $H\Delta$ ἴση κείσθω ἡ HE, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ EZ. ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάπτεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα ἐκτὸς πεσεῖται αὐτῆς. ὥστε συμπεσεῖται τῇ $\Delta\Gamma$, καὶ δυεῖν εὐθειῶν ἔσται τὰ αὐτὰ πέρατα· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς $A\Gamma$ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

λς΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἐφάπτηταί τις εὐθεῖα συμπίπτουσα τῇ πλαγίᾳ τοῦ εἴδους πλευρᾷ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, ἔσται ὡς ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλαγίας πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, οὕτως ἡ ἀπολαμβανομένη ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ πέρατι τῆς πλευρᾶς πρὸς τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ ἑτέρῳ πέρατι τῆς πλευρᾶς, ὥστε τὰς ὁμολόγους συνεχεῖς εἶναι, καὶ εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς τοῦ κώνου τομῆς ἑτέρα εὐθεῖα οὐ παρεμπεσεῖται.

2. ἡ] (alt.) p, om. V. 17. λς΄] p, om. V, m. 2 v.

producta cum recta $A\Gamma$ concurret [prop. XXXIII]; quod fieri non potest; ita enim duarum rectarum iidem termini erunt. itaque ΔH rectae HB inaequalis non est. ergo aequalis est.



iam dico, in spatium inter rectam $A\Gamma$ et sectionem positum nullam rectam incidere.

nam si fieri potest, incidat $\Gamma\Delta$, ponaturque $HE = H\Delta$, et ordinate ducatur EZ. recta igitur a Δ ad Z ducta sectionem contingit [prop. XXXIII]; producta igitur extra eam cadet. quare cum $\Delta\Gamma$ concurret, et duarum rectarum iidem termini erunt; quod absurdum est. ergo in spatium inter sectionem et rectam $A\Gamma$ positum nulla recta incidet.

XXXVI.

Si hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli recta contingit cum latere transuerso figurae concurrens, et a puncto contactus ad diametrum ordinate ducitur recta, erit, ut recta a contingenti ad terminum lateris transuersi abscisa ad rectam a contingenti ad alterum terminum lateris transuersi abscisam, ita recta ab ordinate ducta ad terminum lateris abscisa ad rectam ab ordinate ducta ad alterum terminum lateris abscisam, ita ut rectae inter se correspondentes continuae sint, et in spatium inter contingentem et sectionem coni positum alia recta non incidet.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓE. λέγω, ὅτι ἐστὶν ὡς ἡ BE πρὸς EA, οὕτως ἡ $B\Delta$ πρὸς ΔA.

εἰ γὰρ μή ἐστιν, ἔστω ὡς ἡ $B\Delta$ πρὸς ΔA, ἡ BH πρὸς HA, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ HZ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Δ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐφάψεται τῆς τομῆς· ἐκβαλλομένη ἄρα συμπεσεῖται τῇ $\Gamma\Delta$. δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατά ἐστιν· ὅπερ ἄτοπον.

λέγω, ὅτι μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς $\Gamma\Delta$ εὐθείας οὐδεμία εὐθεῖα παρεμπεσεῖται.

εἰ γὰρ δυνατόν, παρεμπιπτέτω ὡς ἡ $\Gamma\Theta$, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ $B\Theta$ πρὸς ΘA, ἡ BH πρὸς HA, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ HZ· ἡ ἄρα ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὸ Z ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ $\Theta\Gamma$. δυεῖν ἄρα εὐθειῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἔσται· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα εἰς τὸν μεταξὺ τόπον τῆς τε τομῆς καὶ τῆς $\Gamma\Delta$ εὐθείας παρεμπεσεῖται εὐθεῖα.

λζ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, μετὰ δὲ τῆς

6. HZ] $H\Xi$ cv et ut uidetur V; corr. p. 14. πεποιείσθω V corr. p. 15. ἡ] (alt.) om. V; corr. p. 17. $\Theta\Gamma$] $\Delta\Gamma$ V

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, contingat autem $\Gamma\Delta$, et ordinate ducatur ΓE. dico, esse $BE : EA = B\Delta : \Delta A$.

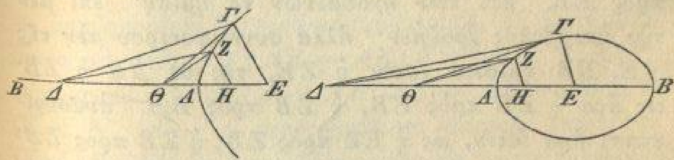
nam si minus, sit $B\Delta : \Delta A = BH : HA$, et ordinate ducatur HZ. itaque recta a Δ ad Z ducta sectionem continget [prop. XXXIV]; producta igitur cum $\Gamma\Delta$ concurret. itaque duarum rectarum iidem termini erunt; quod absurdum est.

dico, inter sectionem et rectam $\Gamma\Delta$ nullam rectam incidere.

nam si fieri potest, incidat ut $\Gamma\Theta$, et fiat

$$B\Theta : \Theta A = BH : HA,$$

ordinateque ducatur HZ; recta igitur a Θ ad Z ducta



producta concurret cum $\Theta\Gamma$. itaque duarum rectarum iidem termini erunt; quod fieri non potest. ergo in spatium inter sectionem et rectam $\Gamma\Delta$ nulla recta incidet.

XXXVII.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus ad diametrum recta ordinate ducitur, recta ab ordinate ducta ad centrum sectionis abscisa cum recta a contingenti ad centrum sectionis abscisa spatium

corr. p. 20. λζ΄] p, om. V, m. 2 v. 22. συμπίπτει V; corr. m. 1. 27. τοῦ] cp, corr. ex τῆς m. 1 V.

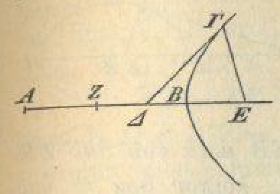
μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον προς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης τετράγωνον, ὃν ἡ πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$, καὶ κατήχθω τεταγμένως ἡ ΓE, κέντρον δὲ ἔστω τὸ Z. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔZE τῷ ἀπὸ ZB, καὶ ὡς τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς τομῆς, καὶ τεταγμένως κατῆκται ἡ ΓE, ἔσται, ὡς ἡ $A\Delta$ πρὸς ΔB, ἡ AE πρὸς EB. συνθέντι ἄρα ἐστίν, ὡς συναμφότερος ἡ $A\Delta$, ΔB πρὸς ΔB, οὕτως συναμφότερος ἡ AE, EB πρὸς EB. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ ἡμίση· ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ἐροῦμεν· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς AE, EB ἡμίσειά ἐστιν ἡ ZE, τῆς δὲ AB ἡ ZB· ὡς ἄρα ἡ ZE πρὸς EB, ἡ ZB πρὸς $B\Delta$. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ EZ πρὸς ZB, ἡ ZB πρὸς $Z\Delta$· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ $EZ\Delta$ τῷ ἀπὸ ZB. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ZE πρὸς EB, ἡ ZB πρὸς $B\Delta$, τουτέστιν ἡ AZ πρὸς ΔB, ἐναλλάξ, ὡς ἡ AZ πρὸς ZE, ἡ ΔB πρὸς BE· συνθέντι, ὡς ἡ AE πρὸς EZ, ἡ ΔE πρὸς EB· ὥστε τὸ ὑπὸ AEB ἴσον τῷ ὑπὸ $ZE\Delta$. ἔστι δὲ ὡς τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZE\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου· ἀλλὰ συναμφοτέρου μὲν τῆς $A\Delta$, ΔB ἡμίσειά ἐστιν ἡ ΔZ, τῆς δὲ AB ἡμίσειά ἐστιν ἡ

8. ΔEZ] $E\Delta Z$ V; corr. Memus. 11. ΓE] E V; corr. Memus. 13. $A\Delta$ — AE] om. V; corr. Memus. 14. μέν] scr. μὲν οὖν.

comprehendet aequale quadrato radii sectionis, cum recta autem inter ordinate ductam et contingentem posita spatium comprehendet, quod ad quadratum ordinate ductae rationem habet, quam latus transuersum ad rectum.



sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, et contingens ducatur $\Gamma\Delta$, ducaturque ordinate ΓE, centrum autem sit Z. dico, esse $\Delta Z \times ZE = ZB^2$, et ut

$$\Delta E \times EZ : E\Gamma^2,$$

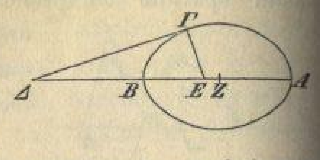
ita latus transuersum ad rectum.

nam quoniam $\Gamma\Delta$ sectionem contingit, et ΓE ordinate ducta est, erit $A\Delta : \Delta B = AE : EB$ [prop. XXXVI]. componendo igitur $A\Delta + \Delta B : \Delta B = AE + EB : EB$ [Eucl. V, 18]. et praecedentium dimidia sumantur [Eucl. V, 15]. in hyperbola igitur sic ratiocinabimur: est autem $ZE = \frac{1}{2}(AE + EB)$, $ZB = \frac{1}{2}AB$. itaque $ZE : EB = ZB : \Delta B$. conuertendo igitur [Eucl. V, 19 coroll.] $EZ : ZB = ZB : Z\Delta$. itaque [Eucl. VI, 17] $EZ \times Z\Delta = ZB^2$. et quoniam est

$$ZE : EB = ZB : \Delta B = AZ : \Delta B,$$

permutando est [Eucl. V, 16] $AZ : ZE = \Delta B : BE$. et componendo $AE : EZ = \Delta E : EB$ [Eucl. V, 18]. quare $AE \times EB = ZE \times E\Delta$ [Eucl. VI, 16]. est autem ut $AE \times EB : \Gamma E^2$, ita latus transuersum ad rectum [prop. XXI]. quare etiam ut $ZE \times E\Delta : \Gamma E^2$, ita latus transuersum ad rectum.

ZB· ὡς ἄρα ἡ ZΔ πρὸς ΔB, ἡ ZB πρὸς BE. ἀναστρέψαντι ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΔZ πρὸς ZB, ἡ BZ πρὸς ZE. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΔZE τῷ ἀπὸ BZ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΔZE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΔEZ καὶ τῷ ἀπὸ ZE, τὸ δὲ



ἀπὸ BZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AEB μετὰ τοῦ ἀπὸ ZE. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ EZ· λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ λοιπῷ τῷ ὑπὸ AEB ἴσον ἔσται. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, οὕτως τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE. ἀλλ' ὡς τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ ΓE, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΔEZ πρὸς τὸ ἀπὸ EΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν.

λη'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἡ ἀπολαμβανομένη εὐθεῖα ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς μετὰ μὲν τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς ἴσον περιέξει τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου τετραγώνῳ, μετὰ δὲ τῆς μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης περιέξει χωρίον λόγον ἔχον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς κατηγμένης, ὃν ἔχει ἡ ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

3. ἴσον ἄρα ἐστί] c; euan. V, rep. mg. m. rec. 4. τῷ ἀπό] c; euan. V, rep. mg. m. rec. 10. λοιπῷ — 11. ΔEZ] om. V; corr. Halley. 15. λη'] p, om. V, m. 2 v. 21. μετὰ

in ellipsi autem et circulo sic: est autem

$$\Delta Z = \tfrac{1}{2}(A\Delta + \Delta B),\ ZB = \tfrac{1}{2}AB.$$

erit igitur $Z\Delta : \Delta B = ZB : BE$. conuertendo igitur est [Eucl. V, 19 coroll.] $\Delta Z : ZB = BZ : ZE$. itaque [Eucl. VI, 17] $\Delta Z \times ZE = BZ^2$. est autem

$$\Delta Z \times ZE = \Delta E \times EZ + ZE^2$$

[Eucl. II, 3] et $BZ^2 = AE \times EB + ZE^2$ [Eucl. II, 5]. auferatur, quod commune est, EZ^2. itaque erit

$$\Delta E \times EZ = AE \times EB.$$

erit igitur $\Delta E \times EZ : \Gamma E^2 = AE \times EB : \Gamma E^2$ [Eucl. V, 7]. uerum ut $AE \times EB : \Gamma E^2$, ita latus transuersum ad rectum [prop. XXI]. ergo ut

$$\Delta E \times EZ : E\Gamma^2,$$

ita latus transuersum ad rectum.

XXXVIII.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum altera diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad eandem diametrum ducitur alteri diametro parallela, recta a recta ita ducta ad centrum sectionis abscisa cum recta a contingenti ad centrum sectionis abscisa spatium comprehendet aequale quadrato dimidiae alterius diametri, cum recta autem inter rectam ad diametrum ductam et contingentem posita spatium comprehendet, quod ad quadratum rectae ad diametrum ductae eam rationem habet, quam habet latus rectum figurae ad transuersum.

μέν] c; euan. V, rep. mg. m. rec. 22. ἐφαπτομένης] cv; ἐφαπτο euan., rep. mg. m. rec. V; νης om. in extr. pag.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΗΒ, δευτέρα δὲ διάμετρος ἡ ΓΗΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἔστω τῆς τομῆς ἡ ΕΔΖ συμπίπτουσα τῇ ΓΔ κατὰ τὸ Ζ, παράλληλος δὲ ἔστω τῇ ΑΒ ἡ ΘΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ ἐστιν ἴσον, καί ἐστιν ὡς τὸ ὑπὸ ΗΘΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία προς τὴν πλαγίαν.

ἤχθω τεταγμένως ἡ ΜΕ· ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ὑπὸ ΗΜΔ πρὸς τὶ ἀπὸ ΜΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ἔστιν ὡς ἡ πλαγία ἡ ΒΔ πρὸς ΓΔ, ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ· καὶ τὰ τέταρτα, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΜΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ, τὸ ἀπὸ ΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ. τὸ δὲ ὑπὸ ΗΜΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῖ ὃν ἔχει ἡ ΗΜ πρὸς ΜΕ, τουτέστι πρὸς ΗΘ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΜ πρὸς ΜΕ. ἀνάπαλιν ἄρα ὁ τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ λόγος συνῆπται ἐκ τοῖ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΗ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΔ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ. τὸ ἄρα ἀπὸ ΗΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΗ πρὸς ΗΜ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΔ. ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΗΔ, τὸ ἀπὶ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ. καὶ ἐναλλὰξ ἄρα ἐστὶν ὡς το ὑπὸ ΖΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ

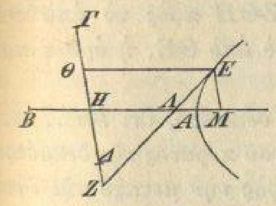
3. ΕΔΖ] ΔΖ V; corr. Comm. 6. τό] (pr.) cv, ins. m. 1 V. 10. ἡ ΒΔ] scripsi, ΒΔ V. πρὸς ΓΔ] om. V; corr. Memus. 14. ὑπό] ἀπό V; corr. p. 17. ἐκ τοῦ] scripsi, ἐξ οὗ V. 18. τοῦ] om. V; corr. p. τό] om. V; corr. p.

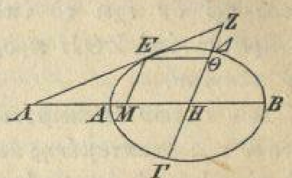
sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AHB, altera autem diametrus $\Gamma H\Delta$, et sectionem contingat $E\Delta Z$ cum $\Gamma\Delta$ in Z concurrens, et ΘE rectae AB parallela sit. dico, esse

$$ZH \times H\Theta = H\Gamma^2,$$

et ut $H\Theta \times \Theta Z : \Theta E^2$, ita latus rectum ad transuersum.

ordinate ducatur ME. erit igitur [prop. XXXVII] ut $HM \times M\Delta : ME^2$, ita latus transuersum ad rectum. est autem, ut latus transuersum $B\Delta$ ad $\Gamma\Delta$, ita $\Gamma\Delta$





ad latus rectum [def. alt. 3]. quare etiam, ut latus transuersum ad latus rectum, ita $AB^2 : \Gamma\Delta^2$ [Eucl. V def. 9]; et partes quartae quoque [Eucl. V, 15], h. e. $H\Delta^2 : H\Gamma^2$. quare etiam

$$HM \times M\Delta : ME^2 = H\Delta^2 : H\Gamma^2.$$

est autem

$HM \times M\Delta : ME^2 = (HM : ME) \times (\Delta M : ME)$ $= (HM : H\Theta) \times (\Delta M : ME)$ [Eucl. I, 34]. itaque e contrario $\Gamma H^2 : H\Delta^2 = (EM : MH) \times (EM : M\Delta)$ $= (\Theta H : HM) \times (ZH : H\Delta)$ [Eucl. VI, 4]. est autem $(\Theta H : HM) \times (ZH : H\Delta) = ZH \times H\Theta : MH \times H\Delta$. erit igitur $ZH \times H\Theta : MH \times H\Delta = \Gamma H^2 : H\Delta^2$. et permutando [Eucl. V, 16] igitur

$$ZH \times H\Theta : \Gamma H^2 = MH \times H\Delta : H\Delta^2.$$

20. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 23. ἐκ τοῦ] (alt.) scripsi; ἐξ οὗ V.

ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΜΗΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΛ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΜΗΛ τῷ ἀπὸ ΗΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ.

πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ, καὶ τὸ ἀπὸ ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΜΛ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΗΜ, τουτέστιν ἡ ΘΗ πρὸς ΘΕ, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΕΜ πρὸς ΜΛ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΛ, τουτέστιν ἡ ΖΘ πρὸς ΘΕ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τοῦ πέρατος τῆς διαμέτρου ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ κατηγμένῃ πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἐφαπτομένης καὶ τῆς δευτέρας διαμέτρου, ἡ μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης πρὸς τὴν μεταξὺ τοῦ ἑτέρου πέρατος καὶ τῆς κατηγμένης.

ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ ΗΓ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἴση γὰρ ἡ ΓΗ τῇ ΗΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΓΗΔ· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΗ πρὸς ΗΘ. καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ ΗΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΓ πρὸς ΓΘ. καὶ τὰ διπλᾶ τῶν ἡγουμένων· ἔστι δὲ διπλασία τῆς ΗΖ συναμφότερος ἡ ΓΖ, ΖΔ διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΓΗ τῇ ΗΔ, τῆς δὲ ΗΓ διπλασία ἡ ΓΔ· ὡς ἄρα συναμφότερος ἡ ΓΖΔ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ διελόντι ὡς ἡ ΓΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΓ· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

5. καὶ τό — 6. ΗΜΛ] om. V; corr. Memus. 19. ΖΗΘ] ΖΘΗ V; corr. Memus. 23. ΗΖ] p, Ζ V, ΖΗ c. 25. Ante

est autem $MH \times HA = HA^2$ [prop. XXXVII]. ergo etiam $ZH \times H\Theta = H\Gamma^2$.

rursus quoniam est, ut latus rectum ad transuersum, ita $EM^2 : HM \times MA$, et $EM^2 : HM \times MA = (EM:HM) \times (EM:MA) = (\Theta H:\Theta E) \times (ZH:HA) = (\Theta H : \Theta E) \times (Z\Theta : \Theta E)$

$$[\text{Eucl. VI, 4}] = Z\Theta \times \Theta H : \Theta E^2,$$

erit, ut $Z\Theta \times \Theta H : \Theta E^2$, ita latus rectum ad transuersum.

Iisdem suppositis demonstrandum, quam rationem habeat recta inter contingentem et terminum diametri ad easdem partes uersus posita, in quibus est recta ordinate ducta, ad rectam inter contingentem et alteram diametrum positam, eam habere rectam inter alterum terminum et rectam ordinate ductam positam ad rectam inter alterum terminum et rectam ordinate ductam positam.

nam quoniam est $ZH \times H\Theta = H\Gamma^2$ [u. lin. 2], h. e. $ZH \times H\Theta = \Gamma H \times H\Delta$ (nam $\Gamma H = H\Delta$), erit [Eucl. VI, 16] $ZH : H\Delta = \Gamma H : H\Theta$. et conuertendo [Eucl. V, 19 coroll.] $ZH : Z\Delta = H\Gamma : \Gamma\Theta$. et praecedentium dupla sumantur [Eucl. V, 15]; est autem $\Gamma Z + Z\Delta = 2HZ$, quia $\Gamma H = H\Delta$, et $\Gamma\Delta = 2H\Gamma$. itaque $\Gamma Z + Z\Delta : Z\Delta = \Delta\Gamma : \Gamma\Theta$. et dirimendo [Eucl. V, 17] $\Gamma Z : Z\Delta = \Delta\Theta : \Theta\Gamma$; quod erat demonstrandum.

Corollarium.

manifestum igitur ex iis, quae diximus, rectam EZ sectionem contingere, siue sit $ZH \times H\Theta = H\Gamma^2$,

διά interponitur in extr. lin. ·V· in V, cui signo nihil nunc respondet. 26. ἡ ΓΔ] ΗΔ V; corr. p.

φανερὸν δὴ ἐκ τῶν εἰρημένων, ὅτι ἡ ΕΖ ἐφάπτεται τῆς τομῆς, ἐάν τε ἴσον ᾖ τὸ ὑπὸ ΖΗΘ τῷ ἀπὸ τῆς ΗΓ, ἐάν τε λόγον ἔχῃ τὸ ὑπὸ ΖΘΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΕ τον εἰρημένον· δειχθήσεται γὰρ ἀντιστρόφως.

λθ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ζ, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ΓΔ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΕ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΕ πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΖΕ, ΕΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν ΖΕ, ΕΔ πρὸς τὴν ΕΓ.

ἔστω γὰρ ἴσον τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΕΓ, Η. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΕΔ τῷ ὑπὸ ΓΕ, Η, ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΓΕ, Η πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΕ, τουτέστιν ἡ Η πρὸς ΕΓ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν

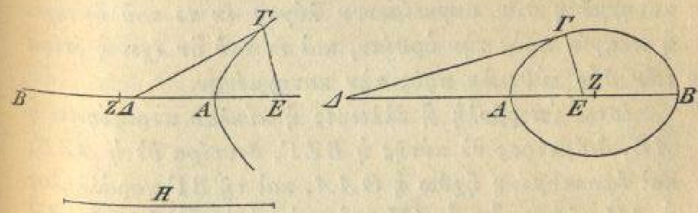
3. ΖΘΗ] ΖΗΘ V; corr. Memus. 5. λθ΄] p, om. V, m. 2 v. 9. δύο] p, β̄ Vc. 13. ὅν] cp, ο e corr. m. 1 V. 14. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 21. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 26. τῷ ὑπό ΓΕ, Η] om. V; corr. p (τῶν εγ η).

siue $Z\Theta \times \Theta H$ ad ΘE^2 rationem habeat, quam diximus; e contrario enim demonstrabitur.

XXXIX.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus ad diametrum recta ordinate ducitur, utracunque recta sumpta erit, aut quae inter rectam ordinate ductam centrumque sectionis posita est, aut quae inter ordinate ductam contingentemque, recta ordinate ducta ad eam rationem habebit compositam ex ea, quam habet altera rectarum illarum ad ordinate ductam, eaque, quam habet latus rectum figurae ad transuersum.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, centrum autem eius sit Z, et ducatur sectionem contingens $\Gamma\Delta$, ordinateque ducatur ΓE.



dico, ΓE ad alterutram rectarum ZE, $E\Delta$ rationem habere compositam ex ea, quam habet latus rectum ad transuersum, eaque, quam habet altera rectarum ZE, $E\Delta$ ad $E\Gamma$.

sit enim $ZE \times E\Delta = E\Gamma \times H$. et quoniam est [prop. XXXVII], ut $ZE \times E\Delta : \Gamma E^2$, ita latus transuersum ad rectum, et $ZE \times E\Delta = \Gamma E \times H$, erit ὀρθίαν. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ $Z E \Delta$ τῷ ὑπὸ ΓE, H, ἔστιν ὡς ἡ EZ πρὸς $E\Gamma$, ἡ H πρὸς $E\Delta$. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓE πρὸς $E\Delta$ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓE πρὸς H καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ H πρὸς $E\Delta$, ἀλλ' ἔστιν ὡς μὲν ἡ ΓE πρὸς H, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ὡς δὲ ἡ H πρὸς ΔE, ἡ ZE πρὸς $E\Gamma$, ἡ ΓE ἄρα πρὸς $E\Delta$ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν καὶ ἡ ZE πρὸς $E\Gamma$.

μʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, ἥτις ἂν ληφθῇ τῶν δύο εὐθειῶν, ὧν ἐστιν ἡ μὲν μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς, ἡ δὲ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἐφαπτομένης, ἕξει πρὸς αὐτὴν ἡ κατηγμένη τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἑτέρα τῶν δύο εὐθειῶν πρὸς τὴν κατηγμένην.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ $BZ\Gamma$, δευτέρα δὲ ἡ ΔZE, καὶ ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ $\Theta \Lambda A$, καὶ τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ AH. λέγω, ὅτι ἡ AH πρὸς τὴν ἑτέραν τῶν ΘH, ZH τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ ἡ ἑτέρα τῶν ΘH, ZH πρὸς τὴν HA.

2. H] (pr.) Δ V; corr. p. 6. ΔE] $\Delta E\Gamma$ uel $\Delta E\Delta$ V, $\Delta E\Delta$ c; corr. p. 10. μʹ] p, om. V, m. 2 v. 17. ἕξει] om. V; corr. Memus. 19. ἐκ τοῦ] scripsi; ἐξ οὗ V. 23. $B\Gamma$] $\Delta\Gamma$ V; corr. p (B e corr.).

ut $\Gamma E \times H : \Gamma E^2$, h. e. ut $H : E\Gamma$, ita latus transuersum ad rectum. et quoniam est

$$ZE \times E\Delta = \Gamma E \times H,$$

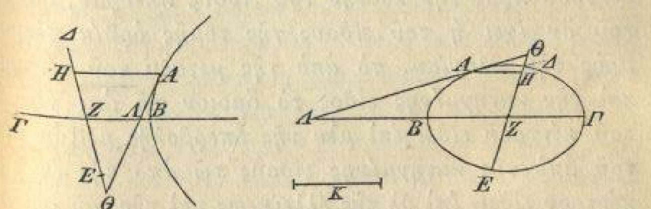
erit [Eucl. VI, 16] $EZ : E\Gamma = H : E\Delta$. et quoniam est $\Gamma E : E\Delta = (\Gamma E : H) \times (H : E\Delta)$, et est, ut $\Gamma E : H$, ita latus rectum ad transuersum, et

$$H : \Delta E = ZE : E\Gamma,$$

$\Gamma E : E\Delta$ rationem habet compositam ex ea, quam habet latus rectum ad transuersum, eaque, quam habet ZE ad $E\Gamma$.

XL.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum altera diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad eandem diametrum ducitur alteri diametro parallela, utracunque recta sumpta erit, aut quae inter rectam ad diametrum ductam centrumque sectionis posita est, aut quae inter rectam illam contingentemque est, ad eam recta ad diametrum ducta rationem habebit compositam ex ea, quam habet latus transuersum ad rectum, eaque, quam habet altera rectarum illarum ad rectam ad diametrum ductam.



sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli AB, diametrus autem eius $BZ\Gamma$ et diametrus altera ΔZE, ducaturque contingens $\Theta \Lambda A$ et rectae $B\Gamma$ parallela ἔστω τῷ ὑπὸ $\Theta H Z$ ἴσον τὸ ὑπὸ HA, K. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, το ὑπὸ $\Theta H Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ HA, τῷ δὲ ὑπὸ $\Theta H Z$ ἴσον τὸ ὑπὸ HA, K, καὶ τὸ ὑπὸ HA, K ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ HA, τουτέστιν ἡ K πρὸς AH, ἔστιν ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ ἐπεὶ ἡ AH πρὸς HZ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ AH πρὸς K καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ K πρὸς HZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ HA πρὸς K, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ὡς δὲ ἡ K πρὸς HZ, ἡ ΘH πρὸς HA διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ $\Theta H Z$ τῷ ὑπὸ AH, K, ἡ AH ἄρα πρὸς HZ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ $H\Theta$ πρὸς HA.

μα'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ εὐθεῖα καταχθῇ τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ἀπό τε τῆς τεταγμένης καὶ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου ἀναγραφῇ εἴδη παραλληλόγραμμα ἰσογώνια, ἔχῃ δὲ ἡ κατηγμένη πλευρὰ πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευρὰν τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ἐκ τοῦ κέντρου πρὸς τὴν λοιπὴν τοῦ εἴδους πλευράν, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ εἴδους τῆς τομῆς ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου

1. $\Theta H Z$] $\Theta Z H$ V; corr. p (τῶν ΘH, HZ). 7. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 13. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 14. μα'] p, om. V, m. 2 v. 21. τήν] p, om. V. λοιπὴν τήν c. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley.

AH. dico, AH ad alterutram rectarum ΘH, ZH rationem habere compositam ex ea, quam habet latus transuersum ad rectum, eaque, quam habet altera rectarum ΘH, ZH ad HA.

sit $HA \times K = \Theta H \times HZ$. et quoniam est, ut latus rectum ad transuersum, ita $\Theta H \times HZ : HA^2$ [prop. XXXVIII], et $HA \times K = \Theta H \times HZ$, erit etiam, ut $HA \times K : HA^2$, h. e. ut $K : AH$, ita latus rectum ad transuersum. et quoniam est

$$AH : HZ = (AH : K) \times (K : HZ),$$

et ut $HA : K$, ita latus transuersum ad rectum, et $K : HZ = \Theta H : HA$, quia $\Theta H \times HZ = AH \times K$ [Eucl. VI, 16], $AH : HZ$ rationem habet compositam ex ea, quam habet latus transuersum ad rectum, eaque, quam habet $H\Theta$ ad HA.

XLI.

Si in hyperbola uel ellipsi uel ambitu circuli recta ad diametrum ordinate ducitur, et in recta ordinate ducta radioque figurae parallelogrammae aequiangulae describuntur, latus autem ordinate ductum ad reliquum latus figurae rationem habet compositam ex ea, quam habet radius ad reliquum latus figurae, eaque, quam habet latus rectum figurae sectionis ad transuersum, figura in recta inter centrum rectamque ordinate ductam posita descripta similis figurae in radio descriptae in hyperbola excedit figuram in ordinate ducta descriptam figura in radio descripta, in ellipsi uero ambituque circuli adiuncta figura in ordinate ducta descripta aequalis est figurae in radio descriptae.

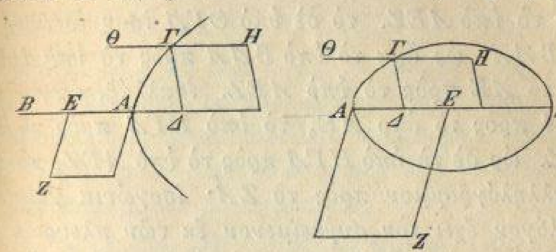
περιφερείας μετὰ τοῦ ἀπὸ τῆς κατηγμένης εἴδους ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου εἴδει.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΔ, καὶ ἀπὸ τῶν ΕΔ, ΓΔ ἰσογώνια εἴδη ἀναγεγράφθω τὰ ΑΖ, ΔΗ, καὶ ἡ ΓΔ πρὸς τὴν ΓΗ τὸν συγκείμενον ἐχέτω λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ, καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ ἴσον ἐστὶ τοῖς ΑΖ, ΗΔ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ ὅμοιον τῷ ΑΖ μετὰ τοῦ ΗΔ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.

πεποιήσθω γάρ, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, ἀλλ' ὡς ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, τὸ ἀπὸ τῆς ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΓΘ, ὡς δὲ ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ ΔΓ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΒΔΑ τῷ ὑπὸ ΔΓΘ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τουτέστιν ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ, ἔτι δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΑΕ πρὸς ΕΖ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔΓ πρὸς ΓΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΓ πρὸς ΓΗ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΓΘ·

8. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 13. πεποιείσθω V; corr. p. 23. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 25. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 27. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, centrum autem E, et ordinate ducatur $\Gamma\Delta$, et in $E\Delta$, $\Gamma\Delta$ figurae aequiangulae describantur AZ, ΔH, rationemque habeat $\Gamma\Delta : \Gamma H$ compositam ex ea, quam habet $AE : EZ$, eaque, quam



habet latus rectum ad transuersum. dico, in hyperbola figuram in $E\Delta$ descriptam similem figurae AZ aequalem esse figuris $AZ + H\Delta$, in ellipsi autem et circulo figuram in $E\Delta$ descriptam figurae AZ similem adiuncta figura $H\Delta$ aequalem esse figurae AZ.

fiat enim, ut latus rectum ad transuersum, ita $\Delta\Gamma$ ad $\Gamma\Theta$. et quoniam est, ut $\Delta\Gamma : \Gamma\Theta$, ita latus rectum ad transuersum, est autem $\Delta\Gamma : \Gamma\Theta = \Delta\Gamma^2 : \Delta\Gamma \times \Gamma\Theta$, et ut latus rectum ad transuersum, ita $\Delta\Gamma^2$ ad $B\Delta \times \Delta A$ [prop. XXI], erit $B\Delta \times \Delta A = \Delta\Gamma \times \Gamma\Theta$ [Eucl. V, 9]. et quoniam $\Delta\Gamma : \Gamma H$ rationem habet compositam ex ea, quam habet $AE : EZ$, eaque, quam habet latus rectum ad transuersum, h. e. $\Delta\Gamma : \Gamma\Theta$, et praeterea est $\Delta\Gamma : \Gamma H = (\Delta\Gamma : \Gamma\Theta) \times (\Theta\Gamma : \Gamma H)$, erit $(AE : EZ) \times (\Delta\Gamma : \Gamma\Theta) = (\Delta\Gamma : \Gamma\Theta) \times (\Theta\Gamma : \Gamma H)$. auferatur, quae communis est, ratio $\Gamma\Delta : \Gamma\Theta$. itaque $AE : EZ = \Theta\Gamma : \Gamma H$. est autem

$$\Theta\Gamma : \Gamma H = \Theta\Gamma \times \Gamma\Delta : H\Gamma \times \Gamma\Delta,$$

λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς AE πρὸς EZ λόγος λοιπῷ τῷ τῆς $\Theta\Gamma$ πρὸς ΓH λόγῳ ἐστὶν ὁ αὐτός. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $\Theta\Gamma$ πρὸς ΓH, τὸ ὑπὸ $\Theta\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $H\Gamma\Delta$, ὡς δὲ ἡ AE πρὸς EZ, τὸ ἀπὸ AE πρὸς τὸ ὑπὸ AEZ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $\Theta\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $H\Gamma\Delta$, τὸ ἀπὸ EA πρὸς τὸ ὑπὸ AEZ. τὸ δὲ ὑπὸ $\Theta\Gamma\Delta$ ἴσον ἐδείχθη τῷ ὑπὸ $B\Delta A$· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $B\Delta A$ πρὸς τὸ ὑπὸ $H\Gamma\Delta$, τὸ ἀπὸ AE πρὸς τὸ ὑπὸ AEZ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ $B\Delta A$ πρὸς τὸ ἀπο AE, τὸ ὑπὸ $H\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ AEZ. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ $H\Gamma\Delta$ πρὸς τὸ ὑπὸ AEZ, τὸ ΔH παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ZA· ἰσογώνια γάρ ἐστι καὶ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τῶν πλευρῶν τῆς $H\Gamma$ πρὸς AE καὶ τῆς $\Gamma\Delta$ πρὸς EZ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $B\Delta A$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ $H\Delta$ προς AZ.

λεκτέον τοίνυν ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς· [ὡς πάντα πρὸς πάντα, ἓν πρὸς ἕν] ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $B\Delta A$ μετὰ τοῦ ἀπὸ AE πρὸς τὸ ἀπὸ AE, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔE πρὸς τὸ ἀπὸ EA, οὕτως τὰ $H\Delta$, AZ πρὸς τὸ AZ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $E\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, οὕτως τὸ ἀπὸ $E\Delta$ εἶδος τὸ ὅμοιον καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένον τῷ AZ πρὸς τὸ AZ· ὡς ἄρα τὰ $H\Delta$, AZ πρὸς τὸ AZ, οὕτως τὸ ἀπὸ $E\Delta$ εἶδος ὅμοιον τῷ AZ πρὸς τὸ AZ. τὸ ἀπὸ $E\Delta$ ἄρα εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ AZ ἴσον ἐστὶ τοῖς $H\Delta$, AZ.

ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ἐροῦμεν· ἐπεὶ οὖν ὡς ὅλον ἐστὶ τὸ ἀπὸ AE πρὸς ὅλον τὸ AZ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ $A\Delta B$ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔH, καὶ λοιπόν ἐστι πρὸς λοιπόν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀπὸ δὲ τοῦ ἀπὸ EA ἐὰν ἀφ-

15. ὡς πάντα — 16. ἕν] falsa sunt; debuit enim συνθέντι dici; del. Comm. in notis fol. 30ᵛ. 17. τουτέστι — 18. $E\Delta$]

$AE : EZ = AE^2 : AE \times EZ$. itaque erit

$$\Theta\Gamma \times \Gamma\Delta : H\Gamma \times \Gamma\Delta = EA^2 : AE \times EZ.$$

demonstrauimus autem, esse $\Theta\Gamma \times \Gamma\Delta = B\Delta \times \Delta A$. erit igitur $B\Delta \times \Delta A : H\Gamma \times \Gamma\Delta = AE^2 : AE \times EZ$. permutando [Eucl. V, 16]

$$B\Delta \times \Delta A : AE^2 = H\Gamma \times \Gamma\Delta : AE \times EZ.$$

est autem $H\Gamma \times \Gamma\Delta : AE \times EZ = \Delta H : ZA$ [Eucl. VI, 23]; nam parallelogramma aequiangula sunt et rationem habent ex lateribus compositam $H\Gamma : AE$ et $\Gamma\Delta : EZ$. quare etiam $B\Delta \times \Delta A : EA^2 = H\Delta : AZ$.

dicendum igitur in hyperbola:

$$B\Delta \times \Delta A + AE^2 : AE^2 = H\Delta + AZ : AZ$$

[Eucl. V, 18], h. e. [Eucl. II, 6]

$$\Delta E^2 : EA^2 = H\Delta + AZ : AZ.$$

est autem, ut $E\Delta^2 : EA^2$, ita figura in $E\Delta$ similis et similiter descripta figurae AZ ad AZ [Eucl. VI, 20 coroll.]. itaque ut $H\Delta + AZ : AZ$, ita figura in $E\Delta$ descripta figurae AZ similis ad AZ. ergo figura in $E\Delta$ descripta figurae AZ similis figuris $H\Delta + AZ$ aequalis est.

in ellipsi uero et ambitu circuli dicemus: quoniam est $AE^2 : AZ = A\Delta \times \Delta B : \Delta H$ [Eucl. V, 16], erit etiam, ut totum ad totum, ita reliquum ad reliquum [Eucl. V, 19]. sin ab EA^2 aufertur $B\Delta \times \Delta A$, relinquitur ΔE^2 [Eucl. II, 5]. itaque

$$\Delta E^2 : AZ \div \Delta H = AE^2 : AZ.$$

est autem, ut $AE^2 : AZ$, ita ΔE^2 ad figuram in ΔE

bis V (altero loco $E\Delta$ pro ΔE); corr. p. 23. $E\Delta$] EZ V; corr. p (τῆς $E\Delta$).

αιρεθῇ τὸ ὑπὸ ΒΔΑ, λοιπόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΔΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΑΖ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ΑΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὴν ὑπεροχήν, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΔΕ εἶδος ὅμοιον τῷ ΑΖ τῇ ὑπεροχῇ, ἣν ὑπερέχει τὸ ΑΖ τοῦ ΔΗ. μετὰ τοῦ ΔΗ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΖ.

μβ′.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς εὐθεῖα καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον τεταγμένως, ληφθέντος δέ τινος ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου καταχθῶσιν ἐπὶ τὴν διάμετρον δύο εὐθεῖαι, καὶ ἡ μὲν αὐτῶν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ περιεχομένῳ παραλληλογράμμῳ ὑπό τε τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένης καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΓΘ, καὶ ἀπό τινος σημείου τυχόντος κατήχθω ἡ ΔΖ, καὶ διὰ μὲν τοῦ Δ τῇ ΑΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΕ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΒΖ ἡ ΓΗ, διὰ δὲ τοῦ Β τῇ ΘΓ ἡ ΒΗ. λέγω, ὅτι τὸ ΔΕΖ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

ἐπεὶ γὰρ τῆς τομῆς ἐφάπτεται ἡ ΑΓ, καὶ τεταγμένως

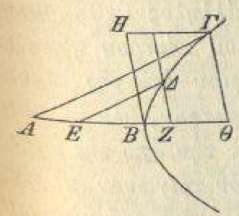
2. ἄρα] ἄρα οὖν V; corr. Halley. ἥ p, Halley. 3. τό] (pr.) τοῦ V; corr. p. ΑΖ] cv, α $\overline{\alpha\zeta}$ V, mg. α m. rec.

descriptam figurae AZ similem [Eucl. VI, 20 coroll.; V, 16]. quare ut $\Delta E^2 : AZ \div \Delta H$, ita ΔE^2 ad figuram in ΔE descriptam figurae AZ similem. itaque figura in ΔE descripta figurae AZ similis aequalis est differentiae $AZ \div \Delta H$ [Eucl. V, 9]. ergo adiuncta figura ΔH figurae AZ aequalis est.

XLII.

Si recta parabolam contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad diametrum ordinate ducitur, sumpto autem in sectione puncto aliquo ad diametrum ducuntur duae rectae, altera contingenti, altera rectae a puncto contactus ordinate ductae parallela, triangulus ab his effectus aequalis est parallelogrammo comprehenso recta a puncto contactus ordinate ducta rectaque a parallela ad uerticem sectionis abscisa.

sit parabola, cuius diametrus sit AB, et sectionem contingens ducatur $A\Gamma$, ordinateque ducatur $\Gamma\Theta$, et a puncto aliquo ducatur ΔZ, ducaturque per Δ rectae $A\Gamma$ parallela ΔE, per Γ autem rectae BZ parallela ΓH, per B autem rectae $\Theta\Gamma$ parallela BH. dico, esse $\Delta EZ = HZ$.



nam quoniam $A\Gamma$ sectionem contingit, et $\Gamma\Theta$ ordinate ducta est, erit [prop. XXXV] $AB = B\Theta$. itaque $A\Theta = 2\Theta B$. quare $A\Theta\Gamma = B\Gamma$

6. ἥ Halley. 9. ἥ p, Halley. 10. ἄρα] addidi; om. V; ante μετά lin. 9 add. τὸ ἄρα ἀπὸ ΔΕ εἶδος τὸ ὅμοιον τῷ ΑΖ Halley cum Memo. 11. μβ′] p, om. V, m. 2 v. 12. παραβολῇ V; corr. Halley. 14. ἐπὶ τῆς] c, insert. m. 1 V.

κατῆκται ἡ ΓΘ, ἴση ἐστὶν ἡ ΑΒ τῇ ΒΘ· διπλασία ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΘ τῆς ΘΒ. τὸ ΑΘΓ ἄρα τρίγωνον τῷ ΒΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ διὰ τὴν τομήν, ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ, τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, ὡς δὲ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ΗΘ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον, ἔστιν ἄρα ὡς τὸ ΑΓΘ τρίγωνον πρὸς τὸ ΕΔΖ τρίγωνον, τὸ ΘΗ παραλληλόγραμμον πρὸς τὸ ΖΗ παραλληλόγραμμον. ἐναλλὰξ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ΑΘΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΒΓ παραλληλόγραμμον, τὸ ΕΔΖ τρίγωνον πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον. ἴσον δὲ τὸ ΑΓΘ τρίγωνον τῷ ΗΘ παραλληλογράμμῳ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ΕΔΖ τρίγωνον τῷ ΗΖ παραλληλογράμμῳ.

μγ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ τῆς κορυφῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δέ τινος σημείου ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἀπὸ τῆς ἁφῆς κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ διὰ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας μετὰ τοῦ ἀποτεμνο-

2. ΘΒ] τθβ V; corr. p. 7. πρὸς τὸ ΗΖ παραλληλόγραμμον] om. V; corr. p. 10. πρός] τῆς πρός V; corr. p.

[Eucl. I, 41]. et quoniam est $\Gamma\Theta^2 : \Delta Z^2 = \Theta B : BZ$ propter sectionem [prop. XX], et

$\Gamma\Theta^2 : \Delta Z^2 = A\Gamma\Theta : E\Delta Z$ [Eucl. VI, 19],

$\Theta B : BZ = H\Theta : HZ$ [Eucl. VI, 1],

erit

$$A\Gamma\Theta : E\Delta Z = \Theta H : ZH.$$

permutando igitur [Eucl. V, 16]

$$A\Theta\Gamma : B\Gamma = E\Delta Z : HZ.$$

est autem $A\Gamma\Theta = H\Theta$. ergo $E\Delta Z = HZ$.

XLIII.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad diametrum ordinate ducitur, per uerticem autem huic parallela ducitur recta cum recta per punctum contactus centrumque ducta concurrens, et sumpto in sectione puncto aliquo duae rectae ad diametrum ducuntur, quarum altera rectae contingenti, altera rectae a puncto contactus ordinate ductae parallela est, triangulus ab his effectus in hyperbola triangulo a recta per centrum punctumque contactus ducta absciso minor erit triangulo in radio descripto simili triangulo illi absciso, in ellipsi autem ambituque circuli adiuncto triangulo ad centrum absciso aequalis erit triangulo in radio descripto simili triangulo illi absciso.

12. τό (pr.) — παραλληλόγραμμον] om. V; corr. p (οὕτω τό). 16. μγ΄] p, om. V, m. 2 v. 26. ἡ] ἢ V; corr. p. 27. τῷ] τοῦ V; corr. p („ei" Memus).

μένου πρὸς τῷ κέντρῳ τριγώνου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΔΕ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΗΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΚ, διὰ δὲ τοῦ Β τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΒΛ. λέγω, ὅτι τὸ ΚΜΓ τρίγωνον τοῦ ΓΛΒ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΚΘ τριγώνῳ.

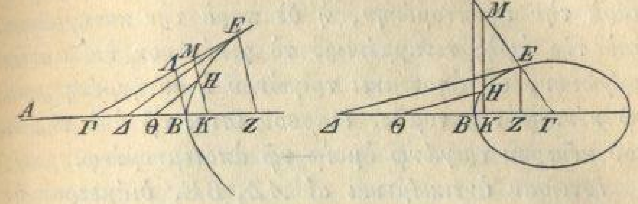
ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΕΔ, κατηγμένη δέ ἐστιν ἡ ΕΖ, ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΖ πρὸς ΖΕ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΕΖ πρὸς ΖΔ, ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΖ πρὸς ΖΕ, ἡ ΓΒ πρὸς ΒΛ· ἕξει ἄρα ἡ ΗΚ πρὸς ΚΘ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΒΓ πρὸς ΒΛ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι τὸ ΓΚΜ τρίγωνον τοῦ ΒΓΛ τριγώνου διαφέρει τῷ ΗΘΚ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν παραλληλογράμμων τὰ αὐτὰ δέδεικται.

μδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα τεταγμένως ἐπὶ τὴν διάμετρον, καὶ ταύτῃ διὰ

8. ΗΚ] scripsi; ΗΚΜ V, ΚΗΜ p. 10. τῷ] ῷ sequente macula (fort. littera ν macula obscurata) V, τῶν v; τῷ pc. 22. τά] om. V; corr. Memus. 23. μδ'] p, om. V, m. 2 v. 25. ἀπό] c, corr. ex ὑπό m. 1 V. τῆς] c, σ euan. V.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, centrum autem Γ, et sectionem contingens ducatur ΔE, ducaturque ΓE, et ordinate duca-



tur EZ, sumatur autem in sectione punctum aliquod H, et contingenti parallela ducatur $H\Theta$, ordinateque ducatur HK, per B autem ordinate ducatur $B\Lambda$. dico, triangulum $KM\Gamma$ a triangulo $\Gamma\Lambda B$ differre triangulo $HK\Theta$.

nam quoniam $E\Delta$ contingit, EZ autem ordinate ducta est, $EZ : Z\Delta$ rationem habet compositam e ratione $\Gamma Z : ZE$ eaque, quam habet latus rectum ad transuersum [prop. XXXIX]. est autem
$$EZ : Z\Delta = HK : K\Theta$$
[Eucl. VI, 4] et $\Gamma Z : ZE = \Gamma B : B\Lambda$ [ib.]. itaque $HK : K\Theta$ rationem habebit compositam ex ratione $B\Gamma : B\Lambda$ eaque, quam habet latus rectum ad transuersum. et propter ea, quae in propositione XLI demonstrata sunt, triangulus ΓKM a triangulo $B\Gamma\Lambda$ differt triangulo $H\Theta K$; nam etiam de parallelogrammis, quae iis duplo maiora sunt, eadem demonstrata sunt [u. Eutocius].

XLIV.

Si recta alterutram oppositarum contingens cum diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad τῆς κορυφῆς τῆς ἑτέρας τομῆς παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς, οὗ ἔτυχε σημείου, καταχθῶσιν εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην ἀπὸ τῆς ἁφῆς τεταγμένως, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς, ἔλασσον ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ ἀποτεμνομένῳ.

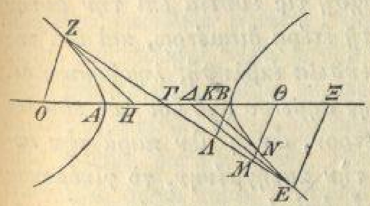
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AZ, BE, διάμετρος δὲ αὐτῶν ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς $Z\varDelta$ τομῆς τοῦ Z ἐφαπτομένη ἤχθω τῆς τομῆς ἡ ZH, τεταγμένως δὲ ἡ ZO, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ καὶ ἐκβεβλήσθω ὡς ἡ ΓE, καὶ διὰ τοῦ B τῇ ZO παράλληλος ἡ $B\varLambda$, καὶ σημεῖόν τι ἐπὶ τῆς BE τομῆς τὸ N, καὶ ἀπὸ τοῦ N τεταγμένως κατήχθω ἡ $N\Theta$, τῇ δὲ ZH παράλληλος ἤχθω ἡ NK. λέγω, ὅτι τὸ ΘKN τρίγωνον τοῦ $\Gamma M\Theta$ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ $\Gamma B\varLambda$ τριγώνῳ.

διὰ γὰρ τοῦ E τῆς BE τομῆς ἐφαπτομένη ἤχθω ἡ $E\varDelta$, τεταγμένως δὲ η $E\Xi$. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ $Z\varDelta$, BE, ὧν διάμετρος ἡ $\varDelta B$, ἡ δὲ διὰ τοῦ κέντρου ἡ $Z\Gamma E$, καὶ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ZH, $E\varDelta$, τῇ ZH παράλληλός ἐστιν ἡ $\varDelta E$. ἡ δὲ NK παράλληλός ἐστι τῇ ZH· καὶ τῇ $E\varDelta$ ἄρα παράλληλός ἐστιν η NK, ἡ δὲ $M\Theta$ τῇ $B\varLambda$. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ BE,

8. ἐκ τοῦ] om. V; corr. p. 14. ἡ ΓZ καὶ ἐκβεβλήσθω] bis V; corr. p. 15. καί] καὶ εἰλήφθω Halley praeeunte Commandino („relictum sit" Memus). 17. ΘKN] p, ΘK V. 21. $E\Xi$] EZ V; corr. p. 23. $Z\Gamma E$] p, Eutocius; $ZE\Gamma$ V. 25. ἄρα] p; om. V. NK] pvc; in V pro certo legi non potest.

diametrum ordinate ducitur, huic autem parallela per uerticem alterius sectionis ducitur recta cum recta per punctum contactus centrumque ducta concurrens, sumpto autem in sectione puncto aliquo ad diametrum rectae ducuntur, quarum altera contingenti, altera rectae a puncto contactus ordinate ductae parallela est, triangulus ab his effectus triangulo, quem recta ordinate ducta ad centrum sectionis abscindit, minor erit triangulo in radio descripto simili triangulo absciso.

sint oppositae AZ, BE, diametrus autem earum AB, centrum autem Γ, et a Z puncto aliquo sectionis $Z\varDelta$ sectionem contingens ducatur ZH, ordinate autem ZO, et ducatur ΓZ producaturque, ut fiat ΓE, et per B rectae ZO parallela ducatur $B\varLambda$, in sectione autem BE punctum aliquod sit N, et ab N ordinate ducatur $N\Theta$, rectae autem ZH parallela ducatur NK. dico, esse $N\Theta K = \Gamma M\Theta \div \Gamma B\varLambda$.



per E enim sectionem BE contingens ducatur $E\varDelta$, ordinate autem $E\Xi$. quoniam igitur $Z\varDelta$, BE oppositae sunt, quarum diametrus est $\varDelta B$, recta autem per centrum ducta $Z\Gamma E$, sectionesque contingentes ZH, $E\varDelta$, rectae ZH parallela est $\varDelta E$ [u. Eutocius]. est autem NK rectae ZH parallela; quare etiam rectae $E\varDelta$ parallela est NK [Eucl. I, 30], $M\Theta$ autem rectae $B\varLambda$ parallela. quoniam igitur hyperbola est BE, cuius diametrus est AB, centrum autem Γ, sectionem autem contingens $\varDelta E$ et ordinate ducta $E\Xi$, ἧς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΔE, τεταγμένως δὲ ἡ $E\Xi$, καὶ τῇ $E\Xi$ παράλληλός ἐστιν ἡ $B\Delta$, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ N, ἀφ᾽ οὗ τεταγμένως μὲν κατῆκται ἡ $N\Theta$, παράλληλος δὲ ἦκται τῇ ΔE ἡ KN, τὸ ἄρα $N\Theta K$ τρίγωνον τοῦ $\Theta M\Gamma$ τριγώνου ἔλασσόν ἐστι τῷ $B\Gamma\Delta$ τριγώνῳ· τοῦτο γὰρ ἐν τῷ μγ΄ θεωρήματι δέδεικται.

με΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ ἀπὸ τῆς ἁφῆς καταχθῇ τις εὐθεῖα ἐπὶ τὴν αὐτὴν διάμετρον παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ληφθέντος δέ, οὗ ἔτυχεν, ἐπὶ τῆς τομῆς σημείου ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ὧν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν κατηγμένην, τὸ γινόμενον ὑπ᾽ αὐτῶν τρίγωνον, οὗ ἀποτέμνει τριγώνου ἡ κατηγμένη πρὸς τῷ κέντρῳ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ ἀποτεμνομένου ἴσον ἔσται τῷ τριγώνῳ, οὗ βάσις μὲν ἡ ἐφαπτομένη, κορυφὴ δὲ τὸ κέντρον τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $AB\Gamma$, ἧς διάμετρος μὲν ἡ $A\Theta$, δευτέρα δὲ ἡ $\Theta\Delta$, κέντρον δὲ τὸ Θ, καὶ ἡ μὲν $\Gamma M\Lambda$ ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ Γ, ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ ἤχθω παρὰ τὴν $A\Theta$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $\Theta\Gamma$ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν

6. $B\Gamma\Delta$] $\Gamma B\Gamma\Delta$ V; corr. p. 8. με΄] p, om. V, m. 2 v. 10. τῇ δευτέρᾳ] bis V (in extr. et prima pag.); corr. cvp.

$B\Delta$ autem rectae $E\Xi$ parallela est, et in sectione sumptum est punctum N, a quo ordinate ducta est $N\Theta$, rectae autem ΔE parallela KN, erit

$$N\Theta K = \Theta M\Gamma \div B\Gamma\Delta;$$

hoc enim in propositione XLIII demonstratum est.

XLV.

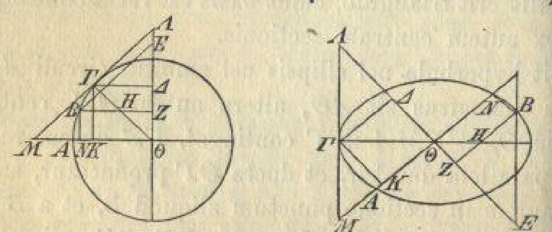
Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum altera diametro concurrit, et a puncto contactus recta ad eandem diametrum alteri diametro parallela ducitur, per punctum autem contactus centrumque recta producitur, et sumpto in sectione puncto aliquo duae rectae ad alteram diametrum ducuntur, quarum altera contingenti, altera rectae ordinate ductae parallela est, triangulus ab his effectus triangulo, quem recta ordinate ducta ad centrum abscindit, in hyperbola maior erit triangulo, cuius basis est recta contingens, uertex autem centrum sectionis, in ellipsi autem circuloque adiuncto triangulo absciso aequalis erit triangulo, cuius basis est recta contingens, uertex autem centrum sectionis.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli $AB\Gamma$, cuius diametrus sit $A\Theta$, altera autem $\Theta\Delta$, centrum autem Θ, et $\Gamma M\Lambda$ in Γ contingat, $\Gamma\Delta$ autem rectae $A\Theta$ parallela ducatur, et ducta $\Theta\Gamma$ producatur, sumatur autem in sectione punctum aliquod B, et a B rectis $\Lambda\Gamma$, $\Gamma\Delta$ parallelae ducantur BE, BZ. dico, esse

17. τρίγωνον] $\Delta I'$ V (h. e. Δ'). 25. ἡ] (alt.) c, om. V. $\Theta\Delta$] $\Delta\Theta\Delta$ Halley.

σημεῖον τὸ B, καὶ ἀπὸ τοῦ B ἤχθωσαν αἱ BE, BZ παρὰ τὰς $\varLambda\Gamma$, $\Gamma\varDelta$. λέγω, ὅτι ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τὸ BEZ τρίγωνον τοῦ $H\Theta Z$ μεῖζόν ἐστι τῷ $\varLambda\Gamma\Theta$, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου μετὰ τοῦ $ZH\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ $\Gamma\varLambda\Theta$.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ΓK, BN παρὰ τὴν $\varDelta\Theta$. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ ΓM, κατῆκται δὲ ἡ ΓK, ἡ ΓK πρὸς $K\Theta$ τὸν συγκείμενον λόγον ἔχει ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ MK πρὸς $K\Gamma$, καὶ τοῦ ὃν ἔχει τοῦ εἴδους ἡ ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν· ὡς δὲ ἡ MK πρὸς $K\Gamma$, ἡ $\Gamma\varDelta$ πρὸς $\varDelta\varLambda$· ἡ ΓK ἄρα πρὸς $K\Theta$ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς $\Gamma\varDelta$ πρὸς $\varDelta\varLambda$ καὶ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καί ἐστι τὸ $\Gamma\varDelta\varLambda$ τρίγωνον τὸ ἀπὸ τῆς $K\Theta$ εἶδος, τὸ δὲ $\Gamma K\Theta$, τουτέστι τὸ $\Gamma\varDelta\Theta$, τὸ ἀπὸ τῆς ΓK, τουτέστι τῆς $\varDelta\Theta$· τὸ $\Gamma\varDelta\varLambda$ ἄρα τρίγωνον τοῦ $\Gamma K\Theta$ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζόν ἐστι τῷ ἀπὸ τῆς $\varLambda\Theta$ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ $\Gamma\varDelta\varLambda$, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τὸ $\Gamma\varDelta\Theta$ μετὰ τοῦ $\Gamma\varDelta\varLambda$ ἴσον ἐστὶ τῷ αὐτῷ· καὶ γὰρ ἐπὶ τῶν διπλασίων αὐτῶν τοῦτο ἐδείχθη ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ πρώτῳ θεωρήματι. ἐπεὶ οὖν τὸ $\Gamma\varDelta\varLambda$ τρίγωνον τοῦ $\Gamma K\Theta$ ἤτοι τοῦ $\Gamma\varDelta\Theta$ διαφέρει

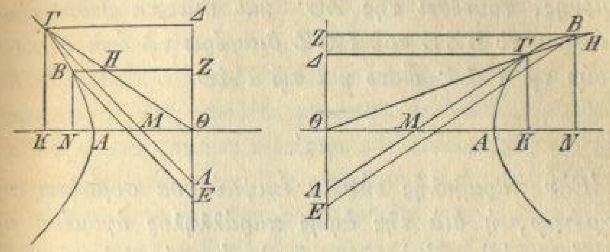


τῷ ἀπὸ τῆς $\varLambda\Theta$ τριγώνῳ ὁμοίῳ τῷ $\Gamma\varDelta\varLambda$, διαφέρει δὲ καὶ τῷ $\Gamma\Theta\varLambda$ τριγώνῳ, ἴσον ἄρα τὸ $\Gamma\Theta\varLambda$ τρίγωνον

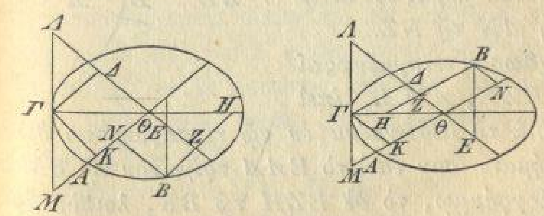
Fig. priorem bis hab. V.

in hyperbola $BEZ = H\Theta Z + \varLambda\Gamma\Theta$, in ellipsi autem et circulo $BEZ + ZH\Theta = \Gamma\varLambda\Theta$.

ducantur enim rectae $\varDelta\Theta$ parallelae ΓK, BN. quoniam igitur ΓM contingit, ΓK autem ordinate ducta est, $\Gamma K : K\Theta$ rationem habebit compositam ex



ratione, quam habet $MK : K\Gamma$, eaque, quam habet latus rectum figurae ad transuersum [prop. XXXIX]. est autem [Eucl. VI, 4] $MK : K\Gamma = \Gamma\varDelta : \varDelta\varLambda$. quare $\Gamma K : K\Theta$ rationem habet compositam ex ratione $\Gamma\varDelta : \varDelta\varLambda$ eaque, quam habet latus rectum ad transuersum. et triangulus $\Gamma\varDelta\varLambda$ figura est in $K\Theta$ descripta, $\Gamma K\Theta$ autem siue $\Gamma\varDelta\Theta$ figura in ΓK siue $\varDelta\Theta$ descripta. itaque in hyperbola $\Gamma\varDelta\varLambda$ triangulus triangulo $\Gamma K\Theta$



maior est triangulo in $\varLambda\Theta$ descripto simili triangulo $\Gamma\varDelta\varLambda$, in ellipsi autem circuloque $\Gamma\varDelta\Theta$ adiuncto $\Gamma\varDelta\varLambda$

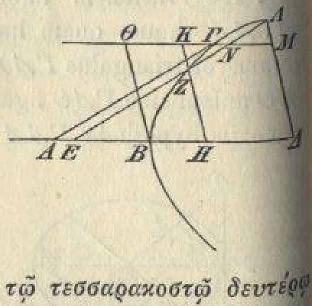
Fig. primam bis V.

τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ τριγώνῳ. ἐπεὶ οὖν τὸ μὲν ΒΖΕ τρίγωνον ὅμοιόν ἐστι τῷ ΓΔΛ, τὸ δὲ ΗΖΘ τῷ ΓΔΘ, τὸν αὐτὸν ἄρα λόγον ἔχει. καί ἐστι τὸ μὲν ΒΖΕ τὸ ἀπὸ τῆς ΝΘ μεταξὺ τῆς κατηγμένης καὶ τοῦ κέντρου, τὸ δὲ ΗΖΘ τὸ ἀπὸ τῆς ΒΝ κατηγμένης, τουτέστι τῆς ΖΘ· καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα πρότερον τὸ ΒΖΕ τοῦ ΗΘΖ διαφέρει τῷ ἀπὸ τῆς ΛΘ ὁμοίῳ τῷ ΓΔΛ· ὥστε καὶ τῷ ΓΛΘ.

μϛ΄.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, ἡ διὰ τῆς ἁφῆς παράλληλος ἀγομένη τῇ διαμέτρῳ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην δίχα τέμνει.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒΔ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΑΓ, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΑΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΘΓΜ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Λ, καὶ ἤχθω τῇ ΑΓ παράλληλος ἡ ΛΝΖΕ. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΛΝ τῇ ΝΖ.



ἤχθωσαν τεταγμένως αἱ ΒΘ, ΚΖΗ, ΛΜΔ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ τεσσαρακοστῷ δευτέρῳ θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ ΕΛΔ τρίγωνον τῷ ΒΜ παραλληλογράμμῳ, τὸ δὲ ΕΖΗ τῷ ΒΚ, λοιπὸν ἄρα τὸ

4. τό] (alt.) om. V; corr. Halley. ΝΘ] pvc; Ν incertum est in V. 8. ΓΔΛ] ΓΔΔ V; corr. p. 9. μϛ΄] p, om. V, m. 2 v. 12. ταὐτά] ταυτα V; corr. p. 23. ΚΖΗ] ΖΗΚ V; corr. p. ΛΜΔ] ΛΜ V; corr. Comm.

eidem aequalis est; nam in figuris, quae iis duplo maiores sunt, hoc demonstratum est in propositione XLI. quoniam igitur triangulus ΓΔΛ a ΓΚΘ siue ΓΔΘ differt triangulo in ΛΘ descripto simili triangulo ΓΔΛ, uerum etiam triangulo ΓΘΛ differt, triangulus ΓΘΛ triangulo in ΛΘ descripto simili triangulo ΓΔΛ aequalis est. quoniam igitur triangulus ΒΖΕ triangulo ΓΔΛ similis est [Eucl. I, 29] et ΗΖΘ triangulo ΓΔΘ, eandem rationem habent[1]). et ΒΖΕ in ΝΘ descriptus est inter rectam ordinatam centrumque, ΗΖΘ autem in ΒΝ ordinate ducta siue ΖΘ; et propter ea, quae antea demonstrata sunt [prop. XLI], ΒΖΕ ab ΗΘΖ differt triangulo in ΛΘ descripto simili triangulo ΓΔΛ. ergo etiam triangulo ΓΛΘ differt.

XLVI.

Si recta parabolam contingens cum diametro concurrit, recta per punctum contactus diametro parallela ducta ad partes sectionis uersus rectas in sectione contingenti parallelas ductas in binas partes aequales secabit.

sit parabola, cuius diametrus sit ΑΒΔ, et sectionem contingat ΑΓ, per Γ autem rectae ΑΔ parallela ducatur ΘΓΜ, et in sectione sumatur punctum aliquod Λ, ducaturque rectae ΑΓ parallela ΛΝΖΕ. dico, esse ΛΝ = ΝΖ.

ducantur ordinate ΒΘ, ΗΖΚ, ΛΜΔ. quoniam igitur propter ea, quae in propositione XLII demon-

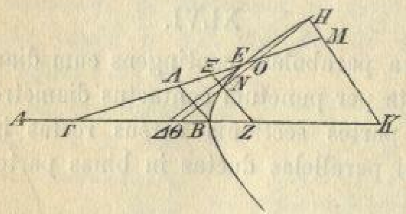
1) Hoc est: latera eandem inter se rationem habent (Eucl. VI, 4); itaque in proportione ΓΚ : ΚΘ cet. substitui possunt rationes laterum triangulorum ΒΖΕ, ΗΖΘ, ita ut condicioni propositionis 41 satis fiat.

HM παραλληλόγραμμον λοιπῷ τῷ $\Lambda ZH\Delta$ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $M\Delta HZN$ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ KZN τρίγωνον τῷ ΛMN ἴσον ἐστί. καί ἐστι παράλληλος ἡ KZ τῇ ΛM· ἴση ἄρα ἡ ZN τῇ ΛN.

μζ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ, δίχα τεμεῖ τὰς ἀγομένας ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος μὲν ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη



τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓE καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τυχὸν ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ N, καὶ διὰ τοῦ N παράλληλος ἤχθω ἡ ΘNOH. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ NO τῇ OH.

κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ ΞNZ, $B\Lambda$, HMK. διὰ τὰ δεδειγμένα ἄρα ἐν τῷ μγ' θεωρήματι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΘNZ τρίγωνον τῷ $\Lambda BZ\Xi$ τετραπλεύρῳ, τὸ

2. $M\Delta HZH$ cv et, ut uidetur, V; corr. p. 4. ΛM] ΛN V; corr. p. 6. μζ'] p, om. V, m. 2 v. 9. ταὐτά] ταῦτα V;

strata sunt, $E\Lambda\Delta = BM$ et $EZH = BK$, erit

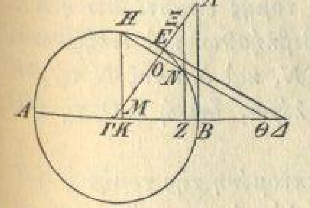
$$HM = \Lambda ZH\Delta.$$

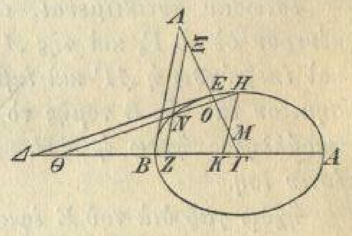
auferatur, quod commune est, pentagonum $M\Delta HZN$; itaque $KZN = \Lambda MN$. est autem KZ rectae ΛM parallela. ergo $ZN = \Lambda N$ [Eucl. VI, 22 coroll.].

XLVII.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et per punctum contactus centrumque recta ad partes sectionis uersus ducitur, rectas in sectione contingenti parallelas ductas in binas partes aequales secabit.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, centrum autem Γ, et sectionem





contingens ducatur ΔE, ducaturque ΓE et producatur, et in sectione sumatur punctum aliquod N, et per N parallela ducatur ΘNOH. dico, esse $NO = OH$.

ordinate enim ducantur ΞNZ, $B\Lambda$, HMK. itaque propter ea, quae in propositione XLIII demonstrata sunt, erit $\Theta NZ = \Lambda BZ\Xi$, $H\Theta K = \Lambda BKM$. quare etiam $NHKZ = MKZ\Xi$. auferatur, quod commune

corr. p. 16. $\Theta NOH\Lambda$ V; corr. p. 20. ΘNZ] BNZ V; corr. p. $\Lambda B\Xi Z$ V; corr. p.

δὲ ΗΘΚ τρίγωνον τῷ ΔΒΚΜ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΗΚΖ τετράπλευρον λοιπῷ τῷ ΜΚΖΞ ἐστιν ἴσον. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΟΝΖΚΜ πεντάπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΟΜΗ τρίγωνον λοιπῷ τῷ ΝΞΟ ἐστιν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΗ τῇ ΝΞ· ἴση ἄρα ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

μη′.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθεῖσα τέμῃ τὴν ἑτέραν τομήν, ἥτις ἂν ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς ἐκβληθείσης.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῆς Α τομῆς ἐφαπτέσθω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ν, καὶ διὰ τοῦ Ν τῇ ΑΚ παράλληλος ἤχθω ἡ ΝΗ. λέγω, ὅτι ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ ἐστιν ἴση.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ε ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΕΔ· ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΑΚ παράλληλός ἐστιν. ὥστε καὶ τῇ ΝΗ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΒΝΗ, ἧς κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΔΕ, καὶ ἐπέζευκται ἡ ΓΕ, καὶ εἴληπται ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Ν, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλος τῇ ΔΕ ἦκται ἡ ΝΗ, διὰ τὸ προδεδειγμένον ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς ἴση ἐστὶν ἡ ΝΟ τῇ ΟΗ.

2. ΜΚΞΖ V; corr. Comm. 4. ΝΞΟ] ΘΝΞΟ V; corr. p. 6. ΟΗ] ΣΗ V; corr. p. 7. μη′] p, om. V, m. 2 v.

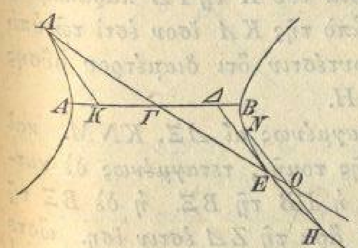
est, pentagonum $ONZKM$. erit igitur $OMH = N\Xi O$. et MH rectae $N\Xi$ parallela est; ergo est $NO = OH$ [Eucl. VI, 22 coroll.].

XLVIII.

Si recta alterutram oppositarum contingens cum diametro concurrit, et per punctum contactus centrumque producta recta alteram sectionem secat, quaecunque recta in altera sectione ducitur contingenti parallela, a recta illa producta in duas partes aequales secabitur.

sint oppositae, quarum diametrus sit AB, centrum autem Γ, et sectionem A contingat KA, ducaturque $A\Gamma$ et producatur, in B autem sectione punctum aliquod sumatur N, et per N rectae AK parallela ducatur NH. dico, esse $NO = OH$.

ducatur enim per E sectionem contingens $E\Delta$; $E\Delta$ igitur rectae ΔK parallela est [u. Eutocius ad prop. XLIV]. quare etiam rectae NH [Eucl. I, 30]. quoniam igitur BNH hyperbola est, cuius centrum est Γ, et contingit ΔE, et ducta est ΓE, in sectione autem sumptum est punctum N, et per id rectae ΔE parallela ducta est NH, propter id, quod de hyperbola antea demonstratum est [prop. XLVII], erit $NO = OH$.



μθ'.

Ἐὰν παραβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ διαμέτρῳ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς παραλλήλου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, οὕτως εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλον τῇ διαμέτρῳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς πεπορισμένης εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ.

ἔστω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ *ΜΒΓ*, ἐφαπτομένη δὲ ἡ *ΓΔ*, καὶ διὰ τοῦ *Δ* τῇ *ΒΓ* παράλληλος ἤχθω ἡ *ΖΔΝ*, τεταγμένως δὲ ἀνήχθω ἡ *ΖΒ*, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ *ΕΔ* πρὸς *ΔΖ*, εὐθεῖά τις ἡ *Η* πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς *ΓΔ*, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ *Κ*, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ *Κ* τῇ *ΓΔ* παράλληλος ἡ *ΚΛΠ*. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ τῆς *ΚΛ* ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ τῆς *Η* καὶ τῆς *ΔΛ*, τουτέστιν ὅτι διαμέτρου οὔσης τῆς *ΔΛ* ὀρθία ἐστὶν ἡ *Η*.

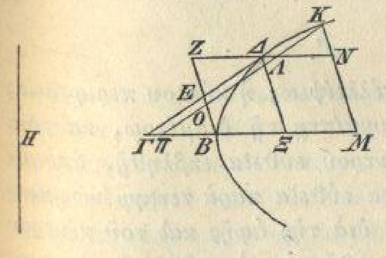
κατήχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ *ΔΞ*, *ΚΝΜ*. καὶ ἐπεὶ ἡ *ΓΔ* ἐφάπτεται τῆς τομῆς, τεταγμένως δὲ κατῆκται ἡ *ΔΞ*, ἴση ἐστὶν ἡ *ΓΒ* τῇ *ΒΞ*. ἡ δὲ *ΒΞ* τῇ *ΖΔ* ἴση ἐστί· καὶ ἡ *ΓΒ* ἄρα τῇ *ΖΔ* ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ τὸ *ΕΓΒ* τρίγωνον τῷ *ΕΖΔ* τριγώνῳ. κοινὸν προσκείσθω τὸ *ΔΕΒΜΝ* σχῆμα· τὸ ἄρα *ΔΓΜΝ*

1. μθ'] p, om. V, m. 2 v. 5. κατηγμένη V; corr. Halley. 9. Hic alicubi desiderari παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, iam Memus

XLIX.

Si recta parabolam contingens cum diametro concurrit, per contactum autem recta diametro parallela ducitur, a uertice autem recta ordinate ductae parallela, et fit, ut pars contingentis inter ordinate ductam punctumque contactus posita ad partem parallelae inter punctum contactus et ordinate ductam positam, ita recta aliqua ad duplam contingentis, quaecunque recta a sectione [contingenti parallela] ad rectam per punctum contactus diametro parallelam ductam ducitur, quadrata aequalis est rectangulo comprehenso recta adsumpta rectaque ab illa ad punctum contactus abscisa.

sit parabola, cuius diametrus sit *ΜΒΓ*, contingens autem *ΓΔ*, et per *Δ* rectae *ΒΓ* parallela ducatur *ΖΔΝ*, ordinate autem ducatur *ΖΒ*, et fiat



$E\Delta : \Delta Z = H : 2\Gamma\Delta$, sumaturque punctum aliquod *Κ* in sectione, per *Κ* autem rectae *ΓΔ* parallela ducatur *ΚΛΠ*. dico, esse $K\Lambda^2 = H \times \Delta\Lambda$, h. e. si *ΔΛ* diametrus sit, latus rectum esse *Η* [prop. XI].

ordinate enim ducantur *ΔΞ*, *ΚΝΜ*. et quoniam *ΓΔ* contingit sectionem, *ΔΞ* autem ordinate ducta est, erit $\Gamma B = B\Xi$ [prop. XXXV]. est autem $B\Xi = Z\Delta$ [Eucl. I, 34]; itaque etiam $\Gamma B = Z\Delta$. quare etiam

senserat. 16. πεποιείσθω V; corr p. 27. ΕΖΔ] pvc, Z corr. ex Δ m. 1 V. 28. προσκείσθω] p; προκείσθω V.

τετράπλευρον τῷ ΖΜ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον, τουτέστι τῷ ΚΠΜ τριγώνῳ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΛΠΜΝ τετράπλευρον· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΛΝ τρίγωνον τῷ ΛΓ παραλληλογράμμῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστιν ἴση ἡ ὑπὸ ΔΛΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΚΛΝ· διπλάσιον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τοῦ ὑπὸ ΛΔΓ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ, ι ΚΛ πρὸς ΛΝ, καὶ ὡς ἄρα ἡ Η πρὸς την διπλασίαν τῆς ΓΔ, ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΚΛ πρὸς ΛΝ, τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, ὡς δὲ ἡ Η πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΓ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΚΛ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΛΝ, τὸ ὑπὸ Η, ΔΛ πρὸς τὸ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δέ ἐστι τὸ ὑπὸ ΚΛΝ τῷ δὶς ὑπὸ ΓΔΛ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΚΛ τῷ ὑπὸ Η, ΔΛ.

ν΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς ἀναχθεῖσα εὐθεῖα παρὰ τεταγμένως κατηγμένην συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ ποιηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην

6. τοῦ] p, corr. ex τό m. 1 V, τῇ c. 14. καί — 15. ΓΔΛ] bis V; corr. p. 17. ν΄] p, om. V, m. 2 v. 21. κατηγμένη V; corr. p.

$E\Gamma B = EZ\Delta$ [Eucl. VI, 19]. communis adiiciatur figura $\Delta EBMN$; erit igitur $\Delta\Gamma MN = ZM = K\Pi M$ [prop. XLII]. auferatur, quod commune est, quadrangulum $\Lambda\Pi MN$. erit igitur $K\Lambda N = \Lambda\Gamma$. est autem $\angle \Delta\Lambda\Pi = \angle K\Lambda N$ [Eucl. I, 15]. itaque erit [u. Eutocius] $K\Lambda \times \Lambda N = 2\Lambda\Delta \times \Delta\Gamma$. et quoniam est $E\Delta : \Delta Z = H : 2\Gamma\Delta$, est autem etiam [Eucl. VI, 4] $E\Delta : \Delta Z = K\Lambda : \Lambda N$, erit etiam $H : 2\Gamma\Delta = K\Lambda : \Lambda N$. uerum $K\Lambda : \Lambda N = K\Lambda^2 : K\Lambda \times \Lambda N$,

$$H : 2\Gamma\Delta = H \times \Delta\Lambda : 2\Gamma\Delta \times \Delta\Lambda.$$

itaque $K\Lambda^2 : K\Lambda \times \Lambda N = H \times \Delta\Lambda : 2\Gamma\Delta \times \Delta\Lambda$. et permutando [Eucl. V, 16]; est autem

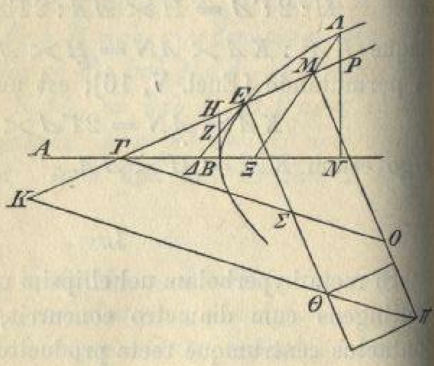
$$K\Lambda \times \Lambda N = 2\Gamma\Delta \times \Delta\Lambda.$$

ergo etiam $K\Lambda^2 = H \times \Delta\Lambda$.

L.

Si recta hyperbolam uel ellipsim uel ambitum circuli contingens cum diametro concurrit, et per punctum contactus centrumque recta producitur, a uertice autem recta ordinate ductae parallela cum recta per punctum contactus centrumque ducta concurrit, et fit, ut pars contingentis inter punctum contactus et ordinate ductam posita ad partem rectae per punctum contactus centrumque ductae inter punctum contactus et ordinate ductam positam, ita recta aliqua ad duplam contingentis, quaecunque recta a sectione ad rectam per punctum contactus centrumque ductam contingenti parallela ducitur, quadrata aequalis erit spatio rectangulo rectae adsumptae adplicato latitudinem habenti rectam ab illa ad punctum contactus abscisam, in hyperbola figura excedenti simili εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεταί τι χωρίον ὀρθογώνιον παρακείμενον παρὰ τὴν πορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς διπλασίας τῆς μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς πορισθείσης εὐθείας, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἐλλεῖπον.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔE, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓE ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ $E\Gamma$ ἴση ἡ ΓK, καὶ διὰ τοῦ B τεταγμένως ἀνήχθω ἡ BZH, διὰ δὲ τοῦ E τῇ $E\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $E\Theta$, καὶ



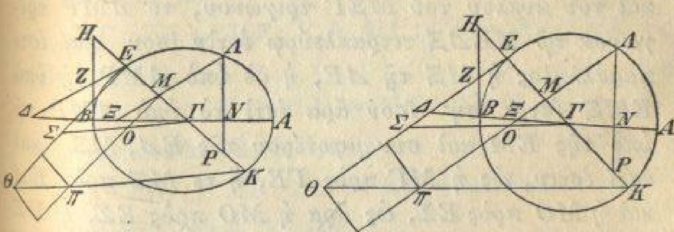
γινέσθω, ὡς ἡ ZE πρὸς EH, οὕτως ἡ $E\Theta$ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς $E\Delta$, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘK ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι ἐπὶ τῆς τομῆς σημεῖον τὸ Λ, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ $E\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ $\Lambda M\Xi$, τῇ δὲ BH ἡ ΛPN, τῇ δὲ $E\Theta$ ἡ $M\Pi$. λέγω, ὅτι τὸ ἀπὸ ΛM ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $EM\Pi$.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Γ τῇ $K\Pi$ παράλληλος ἡ $\Gamma\Sigma O$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $E\Gamma$ τῇ ΓK, ὡς δὲ ἡ $E\Gamma$ πρὸς $K\Gamma$, ἡ $E\Sigma$ πρὸς $\Sigma\Theta$, ἴση ἄρα καὶ ἡ $E\Sigma$ τῇ $\Sigma\Theta$.

21. ZE] p; ΞE Vv; corr. postea V. EH] p; H Vv; corr. postea V.

spatio comprehenso dupla rectae inter centrum punctumque contactus positae et recta adsumpta, in ellipsi autem circuloque eadem deficienti.

sit hyperbola uel ellipsis uel ambitus circuli, cuius diametrus sit AB, centrum autem Γ, contingatque ΔE, et ducta ΓE producatur in utramque partem, ponaturque $\Gamma K = E\Gamma$, et per B ordinate ducatur BZH, per E autem ad $E\Gamma$ perpendicularis ducatur $E\Theta$, et fiat $ZE : EH = E\Theta : 2E\Delta$, ductaque ΘK producatur, sumatur autem in sectione punctum aliquod



Λ, et per id rectae $E\Delta$ parallela ducatur $\Lambda M\Xi$, rectae BH autem parallela ΛPN, et rectae $E\Theta$ parallela $M\Pi$. dico, esse $\Lambda M^2 = EM \times M\Pi$.

per Γ enim rectae $K\Pi$ parallela ducatur $\Gamma\Sigma O$. et quoniam est $E\Gamma = \Gamma K$, et $E\Gamma : K\Gamma = E\Sigma : \Sigma\Theta$ [Eucl. VI, 2], erit etiam $E\Sigma = \Sigma\Theta$. et quoniam est $ZE : EH = \Theta E : 2E\Delta$, et $E\Sigma = \frac{1}{2}E\Theta$, erit

$$ZE : EH = \Sigma E : E\Delta.$$

est autem

$$ZE : EH = \Lambda M : MP \text{ [Eucl. VI, 4];}$$

itaque $\Lambda M : MP = \Sigma E : E\Delta$. et quoniam demonstrauimus [prop. XLIII], esse in hyperbola

$$PN\Gamma = HB\Gamma + \Lambda N\Xi,$$

καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΘΕ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΕΔ, καί ἐστι τῆς ΕΘ ἡμίσεια ἡ ΕΣ, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ὡς δὲ ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ· ὡς ἄρα ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. καὶ ἐπεὶ τὸ ΡΝΓ τρίγωνον τοῦ ΗΒΓ τριγώνου, τουτέστι τοῦ ΓΔΕ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς μεῖζον ἐδείχθη, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου ἔλασσον τῷ ΛΝΞ, κοινῶν ἀφαιρεθέντων ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς τοῦ τε ΕΓΔ τριγώνου καὶ τοῦ ΝΡΜΞ τετραπλεύρου, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου τοῦ ΜΞΓ τριγώνου, τὸ ΛΜΡ τρίγωνον τῷ ΜΕΔΞ τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΜΞ τῇ ΔΕ, ἡ δὲ ὑπὸ ΛΜΡ τῇ ὑπὸ ΕΜΞ ἐστιν ἴση· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΛΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΕΔ, ΜΞ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΜΓ πρὸς ΓΕ, ἥ τε ΜΞ πρὸς ΕΔ καὶ ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ὡς ἄρα ἡ ΜΟ πρὸς ΕΣ, ἡ ΜΞ πρὸς ΔΕ. καὶ συνθέντι, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς ΕΣ, οὕτως συναμφότερος ἡ ΜΞ, ΕΔ πρὸς ΕΔ· ἐναλλάξ, ὡς συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΣΕ πρὸς συναμφότερον τὴν ΞΜ, ΕΔ, ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ. ἀλλ' ὡς μὲν συναμφότερος ἡ ΜΟ, ΕΣ πρὸς συναμφότερον τὴν ΜΞ, ΔΕ, τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΕΜ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ, ὡς δὲ ἡ ΣΕ πρὸς ΕΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΕΗ, τουτέστιν ἡ ΛΜ πρὸς ΜΡ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΜΡ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΕΜ, τὸ ἀπὸ ΛΜ πρὸς τὸ ὑπὸ

2. ἐστι] ἐστιν V; corr. pc. 12. τῷ] τό V; corr. p.

h. e. $PN\Gamma = \Gamma\Delta E + \Lambda N\Xi$ [u. Eutocius ad prop. XLIII], in ellipsi autem circuloque $PN\Gamma = HB\Gamma \div \Lambda N\Xi$, h. e. [u. ibidem] $PN\Gamma + \Lambda N\Xi = \Gamma\Delta E$, ablatis, quae communia sunt, in hyperbola $E\Gamma\Delta$ et $NPM\Xi$, in ellipsi autem circuloque $M\Xi\Gamma$, erit $\Lambda MP = ME\Delta\Xi$. est autem $M\Xi$ rectae ΔE parallela, et

$$\llcorner \Lambda MP = EM\Xi \text{ [Eucl. I, 15];}$$

itaque erit [u. Eutocius ad prop. XLIX]

$$\Lambda M \times MP = EM \times (E\Delta + M\Xi).$$

et quoniam est

$$M\Gamma : \Gamma E = M\Xi : E\Delta,\ M\Gamma : \Gamma E = MO : E\Sigma$$

[Eucl. VI, 4], erit

$$MO : E\Sigma = M\Xi : \Delta E.$$

et componendo [Eucl. V, 18]

$$MO + \Sigma E : E\Sigma = M\Xi + E\Delta : E\Delta;$$

permutando [Eucl. V, 16]

$$MO + \Sigma E : \Xi M + E\Delta = \Sigma E : E\Delta.$$

est autem

$$MO + E\Sigma : M\Xi + \Delta E = (MO + E\Sigma) \times EM : (M\Xi + E\Delta) \times EM,$$

et

$$\Sigma E : E\Delta = ZE : EH = \Lambda M : MP \text{ [Eucl. VI, 4]} = \Lambda M^2 : \Lambda M \times MP;$$

itaque erit

$$(MO + E\Sigma) \times ME : (M\Xi + E\Delta) \times EM = \Lambda M^2 : \Lambda M \times MP.$$

et permutando

$$(MO + E\Sigma) \times ME : M\Lambda^2 = (M\Xi + E\Delta) \times ME : \Lambda M \times MP \text{ [Eucl. V, 16].}$$

ΔΜΡ. καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΜΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ καὶ τῆς ΜΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΜΡ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΔΜΡ τῷ ὑπὸ τῆς ΜΕ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΞ, ΕΔ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ἀπὸ ΔΜ τῷ ὑπὸ ΕΜ καὶ συναμφοτέρου τῆς ΜΟ, ΕΣ. καὶ ἔστιν ἡ μὲν ΣΕ τῇ ΣΘ ἴση, ἡ δὲ ΣΘ τῇ ΟΠ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΜ τῷ ὑπὸ ΕΜΠ.

να΄.

Ἐὰν ὁποτερασοῦν τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐπιψαύουσα συμπίπτῃ τῇ διαμέτρῳ, καὶ διὰ μὲν τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἐκβληθῇ τις εὐθεῖα ἕως τῆς ἑτέρας τομῆς, ἀπὸ δὲ τῆς κορυφῆς εὐθεῖα ἀναχθῇ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην καὶ συμπίπτῃ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένῃ εὐθείᾳ, καὶ γενηθῇ, ὡς τὸ τμῆμα τῆς ἐφαπτομένης τὸ μεταξὺ τῆς ἀνηγμένης καὶ τῆς ἁφῆς πρὸς τὸ τμῆμα τῆς ἠγμένης διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου τὸ μεταξὺ τῆς ἁφῆς καὶ τῆς ἀνηγμένης, εὐθεῖά τις πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ἐφαπτομένης, ἥτις ἂν ἐν τῇ ἑτέρᾳ τῶν τομῶν ἀχθῇ ἐπὶ τὴν διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου ἠγμένην εὐθεῖαν παράλληλος τῇ ἐφαπτομένῃ, δυνήσεται τὸ παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν προσπορισθεῖσαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ ἁφῇ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῆς μεταξὺ τῶν ἀντικειμένων καὶ τῆς προσπορισθείσης εὐθείας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετρος ἡ ΑΒ, κέντρον

2. ἀπό] ὑπό V; corr. p (ἀπὸ τῆς). 9. να΄] p, om. V, m. 2 v. 14. κατηγμένη V; corr. p. 23. προσπορισθεῖσαν] scripsi; προποριςθεῖσαν V.

est autem

$$\Delta M \times MP = ME \times (M\Xi + E\Delta);$$

quare etiam

$$\Delta M^2 = EM \times (MO + E\Sigma).$$

et $\Sigma E = \Sigma\Theta$, $\Sigma\Theta = O\Pi$ [Eucl. I, 34]. ergo

$$\Delta M^2 = EM \times M\Pi.$$

LI.

Si recta alterutram oppositarum contingens cum diametro concurrit, et per punctum contactus centrumque recta usque ad alteram sectionem producitur, a uertice autem recta ordinate ductae parallela ducitur et cum recta per punctum contactus centrumque ducta concurrit, et fit, ut pars contingentis inter ordinate ductam punctumque contactus posita ad partem rectae per punctum contactus centrumque ductae inter punctum contactus et ordinate ductam positam, ita recta aliqua ad duplam contingentis, quaecunque recta in alterutra sectione ad rectam per punctum contactus centrumque ductam contingenti parallela ducitur, quadrata aequalis erit rectangulo rectae adsumptae adplicato latitudinem habenti rectam ab illa ad punctum contactus abscisam excedenti figura simili spatio comprehenso recta inter oppositas posita rectaque adsumpta.

sint oppositae, quarum diametrus sit AB, centrum autem E, et sectionem B contingens ducatur $\Gamma\Delta$, ducaturque ΓE et producatur, ordinate autem ducatur $B\Delta H$, et fiat $\Delta\Gamma : \Gamma H = K : 2\Gamma\Delta$. iam rectas in sectione $B\Gamma$ rectae $\Gamma\Delta$ parallelas ad $E\Gamma$ productam ductas quadratas aequales esse spatiis rectae K ad-δὲ τὸ Ε, καὶ ἤχθω τῆς Β τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ ἤχθω τεταγμένως ἡ ΒΛΗ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, εὐθεῖά τις ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ.

ὅτι μὲν οὖν αἱ ἐν τῇ ΒΓ τομῇ παράλληλοι τῇ ΓΔ ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΓ δύνανται τὰ παρὰ τὴν Κ παρακείμενα χωρία πλάτη ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ ἁφῇ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ, φανερόν· διπλασία γάρ ἐστιν ἡ ΖΓ τῆς ΓΕ.

λέγω δή, ὅτι καὶ ἐν τῇ ΖΑ τομῇ τὸ αὐτὸ συμβήσεται.

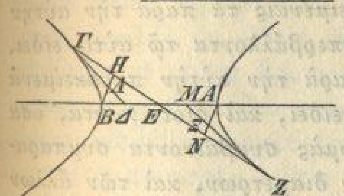
ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη τῆς ΑΖ τομῆς ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἀνήχθω ἡ ΑΞΝ. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ ΒΓ, ΑΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΓΔ, ΜΖ, ἴση ἄρα καὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΓΔ τῇ ΜΖ. ἴση δὲ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΕΖ· καὶ ἡ ΕΔ ἄρα τῇ ΕΜ ἐστιν ἴση. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΛΓ πρὸς ΓΗ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΓΔ, τουτέστι τῆς ΜΖ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΜΖ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΖ, ἧς διάμετρος ἡ ΑΒ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΜΖ, καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ ΑΝ, καί ἐστιν, ὡς ἡ ΞΖ πρὸς ΖΝ, ἡ Κ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΖΜ, ὅσαι ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς παράλληλοι τῇ ΖΜ ἀχθῶσιν ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ ΕΖ, δυνήσονται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῆς Κ εὐθείας καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Ζ σημείῳ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΓΖ, Κ.

3. πεποιείσθω V; corr. p. 13. ΑΞΝ] ΑΝΞ V; corr. p. 18. ἡ Κ] ΗΚ V; corr. p. 22. ἡ Κ] cp, ΗΚ V, sed corr. m. 1. 27. ὑπερβάλλοντα V; corr. Memus, sed nescio, an ferri possit. ΓΖ, Κ] ΓΚΖ V; corr. p.

plicatis latitudines habentibus rectas ab ipsis ad punctum contactus abscisas excedentibus figura simili spatio $\Gamma Z \times K$, manifestum est [prop. L]; nam

$$Z\Gamma = 2\Gamma E \text{ [prop. XXX]}.$$

dico igitur, idem etiam in sectione $Z\Delta$ adcidere. per Z enim sectionem ΔZ contingens ducatur MZ, ordinateque ducatur $\Delta \Xi N$. et quoniam oppositae sunt $B\Gamma$, ΔZ, contingunt autem eas $\Gamma\Delta$, MZ, aequales et parallelae erunt $\Gamma\Delta$, MZ [u. Eutocius ad prop. XLIV]. uerum etiam $\Gamma E = EZ$; quare etiam $E\Delta = EM$ [Eucl. I, 4][1]. et quoniam est $\Lambda\Gamma : \Gamma H = K : 2\Gamma\Delta = K : 2MZ$, erit etiam [Eucl. VI, 4] $\Xi Z : ZN = K : 2MZ$. quoniam igitur ΔZ hyperbola est, cuius diametrus est ΔB, contingens autem MZ, et ordinate ducta est ΔN, est autem



$$\Xi Z : ZN = K : 2ZM,$$

quaecunque rectae a sectione ad EZ productam rectae ZM parallelae ducuntur, quadratae aequales erunt rectangulo comprehenso recta K rectisque ab ipsis ad Z punctum abscisis excedenti figura simili spatio $\Gamma Z \times K$ [prop. L].

[1]) Uerba ἴση δέ lin. 16 — ἐστιν ἴση lin. 17 prorsus inutilia sunt.

Δεδειγμένων δὲ τούτων συμφανές, ὅτι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ ἑκάστη τῶν παρὰ τὴν ἐκ τῆς γενέσεως διάμετρον ἀπαγομένων εὐθειῶν διάμετρός ἐστιν, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ τῇ ἐλλείψει καὶ ταῖς ἀντικειμέναις ἑκάστη τῶν διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένων εὐθειῶν, καὶ διότι ἐν μὲν τῇ παραβολῇ αἱ καταγόμεναι ἐφ' ἑκάστην τῶν διαμέτρων παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα ὀρθογώνια δυνήσονται, ἐν δὲ τῇ ὑπερβολῇ καὶ ταῖς ἀντικειμέναις τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα χωρία καὶ ὑπερβάλλοντα τῷ αὐτῷ εἴδει, ἐν δὲ τῇ ἐλλείψει τὰ παρὰ τὴν αὐτὴν παρακείμενα καὶ ἐλλείποντα τῷ αὐτῷ εἴδει, καὶ διότι πάντα, ὅσα προδέδεικται περὶ τὰς τομὰς συμβαίνοντα συμπαραβαλλομένων τῶν ἀρχικῶν διαμέτρων, καὶ τῶν ἄλλων διαμέτρων παραλαμβανομένων τὰ αὐτὰ συμβήσεται.

νβ'.

Εὐθείας δοθείσης ἐν ἐπιπέδῳ καθ' ἓν σημεῖον πεπερασμένης εὑρεῖν ἐν τῷ ἐπιπέδῳ κώνου τομὴν τὴν καλουμένην παραβολήν, ἧς διάμετρος ἡ δοθεῖσα εὐθεῖα, κορυφὴ δὲ τὸ πέρας τῆς εὐθείας, ἥτις δὲ ἂν ἀπὸ τῆς τομῆς καταχθῇ ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν δοθείσῃ γωνίᾳ, δυνήσεται τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπό τε τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπ' αὐτῆς πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς καὶ ἑτέρας τινὸς δοθείσης εὐθείας.

ἔστω θέσει δεδομένη εὐθεῖα ἡ AB πεπερασμένη κατὰ τὸ A, ἑτέρα δὲ ἡ $\Gamma\Delta$ τῷ μεγέθει, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω πρότερον ὀρθή· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ ὑπο-

1. πόρισμα add. p. 3. ἀγομένων p. 13. συμπαραβαλλομένων] συμπαραλαμβανομένων Halley. 16. νβ'] p, om. V, m. 2 v. 23. αὐτῆς] cp, αὐτῇ supra scripto σ m. 1 V.

His autem demonstratis simul adparet, in parabola omnes rectas diametro originali parallelas diametros esse [prop. XLVI], in hyperbola autem et ellipsi et oppositis omnes rectas per centrum ductas [prop. XLVII—XLVIII], et in parabola rectas ad singulas diametros contingentibus parallelas ductas quadratas aequales esse rectangulis adplicatis eidem rectae [prop. XLIX], in hyperbola autem oppositisque spatiis eidem rectae adplicatis et eadem figura excedentibus [prop. L—LI], in ellipsi autem spatiis eidem rectae adplicatis et eadem figura deficientibus [prop. L], et omnia, quae antea demonstrauimus in sectionibus adcidere adhibitis diametris principalibus, etiam ceteris diametris adsumptis eadem adcidere.

LII.

Data in plano recta in uno puncto terminata in plano inuenire coni sectionem, parabola quae uocatur, ita ut eius diametrus sit data recta, uertex autem terminus rectae, et quaecunque recta a sectione in dato angulo ad diametrum ducitur, quadrata aequalis sit rectangulo comprehenso recta ab ea ad uerticem sectionis abscisa aliaque recta data.

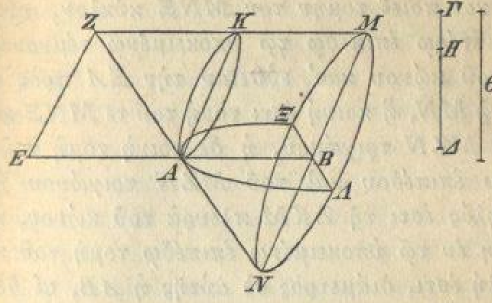
Positione data sit recta AB in A terminata, magnitudine autem alia $\Gamma\Delta$, angulus autem datus prius sit rectus. oportet igitur in plano subiacenti parabolam inuenire, ita ut eius diametrus sit AB, uertex autem A, latus autem rectum $\Gamma\Delta$, et rectae ordinate ductae in recto angulo ducantur, h. e. ita ut AB axis sit.

Producatur AB ad E, et sumatur $\Gamma H = \frac{1}{4}\Gamma\Delta$, et sit $EA > \Gamma H$, sumatur autem Θ media rectarum κειμένῳ ἐπιπέδῳ παραβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἡ AB, κορυφὴ δὲ τὸ A, ὀρθία δὲ ἡ $\Gamma\Delta$, αἱ δὲ καταγόμεναι τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται, τουτέστιν ἵνα ἄξων ᾖ ἡ AB.

ἐκβεβλήσθω ἡ AB ἐπὶ τὸ E, καὶ εἰλήφθω τῆς $\Gamma\Delta$ τέταρτον μέρος ἡ ΓH, τῆς δὲ ΓH μείζων ἔστω ἡ EA, καὶ τῶν $\Gamma\Delta$, EA μέση ἀνάλογον εἰλήφθω ἡ Θ. ἔστιν ἄρα ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς EA, τὸ ἀπο Θ πρὸς τὸ ἀπὸ EA. ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ τῆς EA ἐλάττων ἐστὶν ἢ τετραπλασία· καὶ τὸ ἀπὸ Θ ἄρα τοῦ ἀπὸ EA ἔλαττόν ἐστιν ἢ τετραπλάσιον. ἡ Θ ἄρα τῆς EA ἐλάττων ἐστὶν ἢ διπλῆ· ὥστε δύο αἱ EA τῆς Θ μείζονές εἰσι. δυνατὸν ἄρα ἐστὶν ἐκ τῆς Θ καὶ δύο τῶν EA τρίγωνον συστήσασθαι. συνεστάτω τοίνυν ἐπὶ τῆς EA τρίγωνον τὸ EAZ ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὥστε ἴσην εἶναι τὴν μὲν EA τῇ AZ, τὴν δὲ Θ τῇ ZE, καὶ ἤχθω τῇ μὲν ZE παράλληλος ἡ AK, τῇ δὲ EA ἡ ZK, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ τὸ Z σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ διάμετρον τὴν KA κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ διὰ τῶν AZK ἐπίπεδον. ἔσται δὴ ὀρθὸς ὁ κῶνος· ἴση γὰρ ἡ AZ τῇ ZK. τετμήσθω δὲ ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ KA κύκλῳ, καὶ ποιείτω τομὴν τὸν $MN\Xi$ κύκλον, ὀρθὸν δηλονότι πρὸς τὸ διὰ τῶν MZN ἐπίπεδον, καὶ ἔστω τοῦ $MN\Xi$ κύκλου καὶ τοῦ MZN τριγώνου κοινὴ τομὴ ἡ MN· διάμετρος ἄρα ἐστὶ τοῦ κύκλου. ἔστω δὲ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ κύκλου κοινὴ τομὴ ἡ $\Xi\Lambda$. ἐπεὶ οὖν ὁ $MN\Xi$ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, ὀρθὸς δέ ἐστι καὶ πρὸς τὸ MZN τρίγωνον, ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν

10. ἄρα] scripsi; A V. ἔλαττον] ἐλάττων V; corr. Halley.

$\Gamma\Delta$, EA proportionalis. itaque $\Gamma\Delta : EA = \Theta^2 : EA^2$ [Eucl. V def. 9]. est autem $\Gamma\Delta < 4EA$; quare etiam $\Theta^2 < 4EA^2$; itaque $\Theta < 2EA$; quare $EA + EA > \Theta$. itaque fieri potest, ut ex Θ et duabus EA triangulus construatur [Eucl. I, 22]. construatur igitur in EA triangulus EAZ ad planum subiacens perpendicularis,



ita ut sit $EA = AZ$ et $\Theta = ZE$, et ducatur AK rectae ZE, ZK autem rectae EA parallela, et fingatur conus, cuius uertex sit punctum Z, basis autem circulus circum KA diametrum descriptus ad planum per rectas AZ, ZK perpendicularis. hic igitur conus rectus erit [def. 3]; nam $AZ = ZK$. secetur autem conus plano circulo KA parallelo, quod sectionem efficiat circulum $MN\Xi$ [prop. IV], perpendicularem scilicet ad planum rectarum MZ, ZN, et circuli $MN\Xi$ trianguli que MZN communis sectio sit MN; diametrus igitur erit circuli. communis autem sectio plani subiacentis circulique sit $\Xi\Lambda$. quoniam igitur $MN\Xi$ circulus ad planum subiacens perpendicularis[1]) est,

1) Hoc quidem falsum est; neque enim $MN\Xi$ ad planum subiacens perpendicularis esse potest. hoc intellegens Halleius scripsit lin. 28 sq.: ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ MZN τρίγωνον, ὀρθὸν

τομὴ ἡ $\Xi\Delta$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ MZN τρίγωνον, τουτέστι τὸ $KZ\Delta$· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ τριγώνῳ ὀρθή ἐστιν· ὥστε καὶ πρὸς ἑκατέραν τῶν MN, AB. πάλιν ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ $MN\Xi$ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Z σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ MZN τρίγωνον, καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν $MN\Xi$ κύκλον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου κατ' εὐθεῖαν τὴν $\Xi\Delta$ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ MN, ἡ κοινή ἐστι τομὴ τοῦ τε $MN\Xi$ κύκλου καὶ τοῦ MZN τριγώνου, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ MZN τριγώνου ἡ AB παράλληλός ἐστι τῇ ZKM πλευρᾷ τοῦ κώνου, ἡ ἄρα γινομένη ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ τομὴ τοῦ κώνου παραβολή ἐστι, διάμετρος δὲ αὐτῆς ἡ AB, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν AB τεταγμένως ἐν ὀρθῇ καταχθήσονται γωνίᾳ· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ $\Xi\Delta$ πρὸς ὀρθὰς οὔσῃ τῇ AB. καὶ ἐπεὶ αἱ τρεῖς ἀνάλογόν εἰσιν αἱ $\Gamma\Delta$, Θ, EA, ἴση δὲ ἡ μὲν EA τῇ AZ καὶ τῇ ZK, ἡ δὲ Θ τῇ EZ καὶ τῇ AK, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς AK, ἡ AK πρὸς AZ. καὶ ὡς ἄρα ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς AZ, τὸ ἀπὸ AK πρὸς τὸ ἀπὸ AZ, τουτέστι τὸ ὑπὸ AZK. ὀρθία ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς τομῆς· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ια' θεωρήματι.

νγ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ κείσθω αὐτῇ ἴση ἡ ὑπὸ ΘAE, καὶ τῆς $\Gamma\Delta$

17. γωνίᾳ] γωνίαι V (qui alibi fere ι omittit, raro adscriptum habet); corr. p. 24. ια'] ᾱῑ Vv; corr p. 25. νγ'] cum Eutocio, om. V; νγ mg. p.

idem autem ad triangulum MZN perpendicularis est, communis eorum sectio $\Xi\Delta$ perpendicularis est ad triangulum MZN [Eucl. XI, 19], h. e. ad $KZ\Delta$; quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in triangulo positas perpendicularis est [Eucl. XI def. 3]. itaque etiam ad utramque MN, AB perpendicularis est. rursus quoniam conus, cuius basis est $MN\Xi$ circulus, uertex autem Z punctum, plano sectus est ad triangulum MZN perpendiculari, quod sectionem efficit circulum $MN\Xi$, uerum etiam alio plano sectus est, subiacenti scilicet, basim coni secundum rectam $\Xi\Delta$ secanti perpendicularem ad MN, quae communis est sectio circuli $MN\Xi$ trianguliique MZN, et AB communis sectio plani subiacentis trianguliique MZN lateri coni ZKM parallela est, sectio coni in plano subiacenti orta parabola est, diametrus autem eius AB [prop. XI], et rectae a sectione ad AB ordinate ductae in angulo recto ducentur; nam parallelae sunt rectae $\Xi\Delta$ ad AB perpendiculari. et quoniam est $\Gamma\Delta : \Theta = \Theta : EA$, et $EA = AZ = ZK$, $\Theta = EZ = AK$, erit

$$\Gamma\Delta : AK = AK : AZ.$$

quare etiam $\Gamma\Delta : AZ = AK^2 : AZ^2$ [Eucl. V def. 9] $= AK^2 : AZ \times ZK$. ergo $\Gamma\Delta$ latus rectum sectionis est; hoc enim in propositione XI demonstratum est.

LIII.

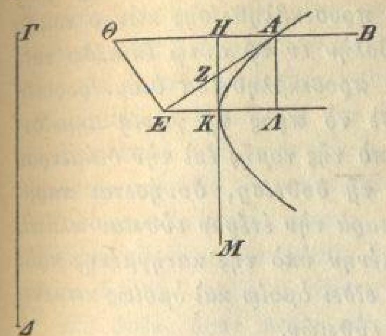
Iisdem suppositis ne sit rectus datus angulus, eique aequalis ponatur $\angle\, \Theta AE$, sit autem $A\Theta = \frac{1}{2}\Gamma\Delta$,

δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον πρὸς τὸ MZN τρίγωνον (praeeunte Memo). quae mutatio cum parum probabilis sit, praetulerim uerba ἐπεὶ οὖν lin. 27 — τρίγωνον lin. 29 delere; sed fortasse interpolatio peius etiam grassata est. etiam uerba τουτέστι τὸ $KZ\Delta$ p. 162 lin. 1—2 inutilia sunt.

ἔστω ἡμίσεια ἡ $A\Theta$, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ ἐπὶ τὴν AE κάθετος ἤχθω ἡ ΘE, καὶ διὰ τοῦ E τῇ $B\Theta$ παράλληλος ἡ $E\Delta$, καὶ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὴν $E\Delta$ κάθετος ἤχθω ἡ $A\Delta$, καὶ τετμήσθω ἡ $E\Delta$ δίχα κατὰ τὸ K, καὶ ἀπὸ τοῦ K τῇ $E\Delta$ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ KM καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Z, H, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς $A\Delta$ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΔKM. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν ΔK, KM, τῆς μὲν $K\Delta$ θέσει πεπερασμένης κατὰ τὸ K, τῆς δὲ KM μεγέθει, καὶ γωνίας ὀρθῆς γεγράφθω παραβολή, ἧς διάμετρος ἡ $K\Delta$, κορυφὴ δὲ τὸ K, ὀρθία δὲ ἡ KM, ὡς προδέδεικται· ἥξει δὲ διὰ τοῦ A διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ $A\Delta$ τῷ ὑπὸ ΔKM, καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ EA διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν EK τῇ $K\Delta$. καί ἐστιν ἡ ΘA τῇ $EK\Delta$ παράλληλος· ἡ ΘAB διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς, αἱ δὲ ἐπ' αὐτὴν ἀπὸ τῆς τομῆς καταγόμεναι παράλληλοι τῇ AE δίχα τμηθήσονται ὑπὸ τῆς AB. καταχθήσονται δὲ ἐν γωνίᾳ τῇ ὑπὸ ΘAE. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $AE\Theta$ γωνία τῇ ὑπὸ AHZ, κοινὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ A, ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $A\Theta E$ τρίγωνον τῷ AHZ. ὡς ἄρα ἡ ΘA πρὸς EA, ἡ ZA πρὸς AH· ὡς ἄρα ἡ διπλασία τῆς $A\Theta$ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AE, ἡ ZA πρὸς AH. ἡ δὲ $\Gamma\Delta$ τῆς ΘA διπλῆ· ὡς ἄρα ἡ ZA πρὸς AH, ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς AE. διὰ δη τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μθ' θεωρήματι ὀρθία ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$.

11. δέ] (alt.) fort. δή. 13. EK] EKT V; corr. p. 15. ἄρα διάμετρος p, Halley. 18. ΘAE — 19. τῇ ὑπό] bis V; corr. p.

et a Θ ad AE perpendicularis ducatur ΘE, per E autem rectae $B\Theta$ parallela $E\Delta$, et ab A ad $E\Delta$ perpendicularis ducatur $A\Delta$, $E\Delta$ autem in K in duas partes aequales secetur, et a K ad $E\Delta$ perpendicularis ducatur KM producaturque ad Z, H, et sit



$$\Delta K \times KM = A\Delta^2.$$

datis autem duabus rectis ΔK, KM, quarum $K\Delta$ positione data est ad K terminata, KM autem magnitudine, et angulo recto describatur parabola, cuius diametrus sit $K\Delta$, uertex autem K, et latus rectum KM, ita ut supra demonstratum est [prop. LII]; per A igitur ueniet, quia $\Delta K \times KM = A\Delta^2$ [prop. XI], et EA sectionem continget, quia $EK = K\Delta$ [prop. XXXIII]. et ΘA rectae $EK\Delta$ parallela est; itaque ΘAB diametrus sectionis est, et rectae a sectione ad eam ductae rectae AE parallelae ab AB in binas partes aequales secabuntur [prop. XLVI]. ducentur autem in angulo ΘAE [Eucl. I, 29]. et quoniam est $\angle AE\Theta = \angle AHZ$, communis autem angulus ad A positus, erit

$$A\Theta E \backsim AHZ.$$

quare [Eucl. VI, 4] $\Theta A : EA = ZA : AH$. itaque $2A\Theta : 2AE = ZA : AH$ [Eucl. V, 15]. est autem $\Gamma\Delta = 2\Theta A$; itaque $ZA : AH = \Gamma\Delta : 2AE$. ergo propter ea, quae in propositione XLIX demonstrata sunt, $\Gamma\Delta$ latus rectum est.

νδ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῆς ἑτέρας ἐκβαλλομένης ἐπὶ ταὐτὰ τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ εὑρεῖν ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολὴν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ὅπως ἡ μὲν προσεκβληθεῖσα διάμετρος εἴη τῆς τομῆς, κορυφὴ δὲ τὸ πρὸς τῇ γωνίᾳ σημεῖον, ἥτις δὲ ἂν καταχθῇ ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον γωνίαν ποιοῦσα ἴσην τῇ δοθείσῃ, δυνήσεται παρακείμενον ὀρθογώνιον παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθεῖαν πλάτος ἔχον τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπὸ τῆς κατηγμένης πρὸς τῇ κορυφῇ ὑπερβάλλον εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν ἐξ ἀρχῆς εὐθειῶν.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πεπερασμέναι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις αἱ AB, $B\Gamma$, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ AB ἐπὶ τὸ Δ· δεῖ δὴ εὑρεῖν ἐν τῷ διὰ τῶν $AB\Gamma$ ἐπιπέδῳ ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ $AB\Delta$, κορυφὴ δὲ τὸ B, ὀρθία δὲ ἡ $B\Gamma$, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν $B\Delta$ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν $B\Gamma$ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ B ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν $AB\Gamma$.

ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς AB ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον, καὶ ἐν αὐτῷ περὶ τὴν AB κύκλος γεγράφθω ὁ $AEBZ$, ὥστε τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου τοῦ κύκλου τὸ ἐν τῷ AEB τμήματι πρὸς τὸ τμῆμα τῆς διαμέτρου

1. νδ'] p, om. V. 3. ταὐτά] ταῦτα V; corr. p. 4. ἐπὶ τῆς προσεκβληθείσης] superuacua uidebantur Commandino

LIV.

Datis duabus rectis terminatis inter se perpendicularibus altera ad angulum rectum uersus producta in recta producta sectionem coni inuenire, hyperbola quae uocatur, in plano rectarum posita, ita ut recta producta diametrus sectionis sit, uertex autem punctum ad angulum positum, et quaecunque recta a sectione ad diametrum ducitur angulum efficiens dato aequalem, quadrata aequalis sit rectangulo alteri rectae adplicato latitudinem habenti rectam ab ordinate ducta ad uerticem abscisam excedenti figura simili similiterque posita figurae rectis a principio datis comprehensae.

sint datae duae rectae terminatae inter se perpendiculares AB, $B\Gamma$, producaturque AB ad Δ. oportet igitur in plano rectarum AB, $B\Gamma$ hyperbolam inuenire, cuius diametrus sit $AB\Delta$, uertex autem B, latus rectum autem $B\Gamma$, et rectae a sectione ad $B\Delta$ in dato angulo ductae quadratae aequales sint spatiis rectae $B\Gamma$ adplicatis latitudines habentibus rectas ab iis ad B abscisas excedentibus figura simili similiterque posita rectangulo $AB \times B\Gamma$.

prius igitur angulus datus rectus sit, et in AB planum ad planum subiacens perpendiculare erigatur, et in eo circum AB circulus describatur $AEBZ$, ita ut pars diametri circuli in segmento AEB posita ad partem diametri in AZB positam maiorem rationem non habeat quam $AB : B\Gamma$ [u. Eutocius], et AEB in puncto E in duas partes aequales secetur, ab E

fol. 34v. 6. εἴη] ἢ p. 13. τῷ] om. V; corr. p. 19. τῆς] ς vp, in V litt. σ in ras. est m. 1. 21. τῷ] τό V; corr. p.

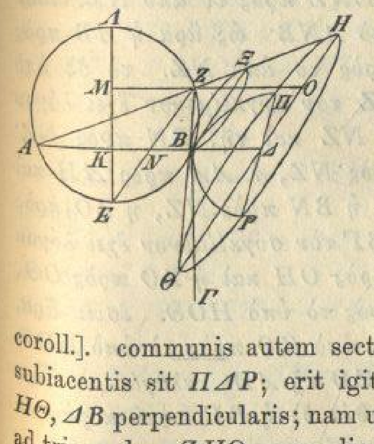
τὸ ἐν τῷ AZB μὴ μείζονα λόγον ἔχειν τοῦ ὃν ἔχει ἡ AB πρὸς $B\Gamma$, καὶ τετμήσθω ἡ AEB δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ E ἐπὶ τὴν AB κάθετος ἡ EK καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $E\Lambda$. εἰ μὲν οὖν ἐστιν, ὡς ἡ AB πρὸς $B\Gamma$, ἡ EK πρὸς $K\Lambda$, τῷ Λ ἂν ἐχρησάμεθα, εἰ δὲ μή, γινέσθω ὡς ἡ AB πρὸς $B\Gamma$, ἡ EK πρὸς ἐλάσσονα τῆς $K\Lambda$ τὴν KM, καὶ διὰ τοῦ M τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ MZ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, EZ, ZB, καὶ διὰ τοῦ B τῇ ZE παράλληλος ἡ $B\Xi$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ AZE γωνία τῇ ὑπὸ EZB, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ AZE τῇ ὑπὸ $A\Xi B$ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ EZB τῇ ὑπὸ ΞBZ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΞBZ ἄρα τῇ ὑπὸ $Z\Xi B$ ἐστιν ἴση· ἴση ἄρα καὶ ἡ ZB τῇ $Z\Xi$. νοείσθω κῶνος, οὗ κορυφὴ μὲν τὸ Z σημεῖον, βάσις δὲ ὁ περὶ τὴν $B\Xi$ διάμετρον κύκλος ὀρθὸς ὢν πρὸς τὸ $BZ\Xi$ τρίγωνον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθός· ἴση γὰρ ἡ ZB τῇ $Z\Xi$. ἐκβεβλήσθωσαν δὴ αἱ BZ, $Z\Xi$, MZ, καὶ τετμήσθω ὁ κῶνος ἐπιπέδῳ παραλλήλῳ τῷ $B\Xi$ κύκλῳ· ἔσται δὴ ἡ τομὴ κύκλος. ἔστω ὁ $H\Pi P$· ὥστε διάμετρος ἔσται τοῦ κύκλου ἡ $H\Theta$. κοινὴ δὲ τομὴ τοῦ $H\Theta$ κύκλου καὶ τοῦ ὑποκειμένου ἐπιπέδου ἔστω ἡ $\Pi\Delta P$· ἔσται δὴ ἡ $\Pi\Delta P$ πρὸς ἑκατέραν τῶν $H\Theta$, ΔB ὀρθή· ἑκάτερος γὰρ τῶν ΞB, ΘH κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ $ZH\Theta$ τρίγωνον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ $ZH\Theta$· καὶ ἡ κοινὴ ἄρα αὐτῶν τομὴ ἡ $\Pi\Delta P$ ὀρθή ἐστι πρὸς τὸ $ZH\Theta$· καὶ πρὸς πάσας ἄρα τὰς ἁπτομένας αὐτῆς εὐθείας καὶ οὔσας ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ὀρθὰς ποιεῖ γωνίας. καὶ

1. μείζονα λόγον] p, μεῖζον ἀνάλογον V; corr. v (in ι circumflexus in acutum mut. m. 1). 17. ZB] c, B e corr. m. 1 V. 18. $Z\Xi$] (pr.) c, Ξ e corr. m. 1 V. 24. ἑκάτερος — 29. γωνίας] mihi suspecta.

autem ad AB perpendicularis ducatur EK producaturque ad Λ; $E\Lambda$ igitur diametrus est [Eucl. III, 1]. iam si sit $AB : B\Gamma = EK : K\Lambda$, puncto Λ utamur; sin minus, fiat $AB : B\Gamma = EK : KM$ minorem quam $K\Lambda$, et per M rectae AB parallela ducatur MZ, ducanturque AZ, EZ, ZB, et per B rectae ZE parallela ducatur $B\Xi$. quoniam igitur est

$$\angle AZE = \angle EZB \text{ [Eucl. III, 27]},$$

est autem $\angle AZE = \angle A\Xi B$, $\angle EZB = \angle \Xi BZ$ [Eucl. I, 29], erit etiam $\angle \Xi BZ = \angle Z\Xi B$; quare etiam $ZB = Z\Xi$ [Eucl. I, 6]. fingatur conus, cuius uertex sit Z punctum, basis autem circulus circum $B\Xi$ diametrum descriptus ad triangulum $BZ\Xi$ perpendicularis. is conus igitur rectus erit [def. 3]; nam $ZB = Z\Xi$. producantur igitur BZ, $Z\Xi$, MZ, conusque plano circulo $B\Xi$ parallelo secetur; sectio igitur circulus erit [prop. IV]. sit $H\Pi P$. $H\Theta$ igitur diametrus circuli erit [prop. IV coroll.]. communis autem sectio circuli $H\Theta$ planique subiacentis sit $\Pi\Delta P$; erit igitur $\Pi\Delta P$ ad utramque $H\Theta$, ΔB perpendicularis; nam uterque circulus ΞB, ΘH ad triangulum $ZH\Theta$ perpendicularis est, planum autem subiacens et ipsum ad $ZH\Theta$ perpendiculare est; itaque



ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ, τέτμηται ἐπιπέδῳ ὀρθῷ πρὸς τὸ ΖΗΘ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ⌊ἐπιπέδῳ τῷ ὑποκειμένῳ κατ' εὐθεῖαν τὴν ΠΔΡ πρὸς ὀρθὰς τῇ ΗΔΘ, ἡ δὲ κοινὴ τομὴ τοῦ τε ὑποκειμένου ἐπιπέδου καὶ τοῦ ΗΖΘ, τουτέστιν ἡ ΔΒ, ἐκβαλλομένη ἐπὶ τὸ Β συμπίπτει τῇ ΗΖ κατὰ τὸ Α, ὑπερβολὴ ἄρα ἔσται ἡ τομὴ διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΠΒΡ, ἧς κορυφὴ μέν ἐστι τὸ Β σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΒΔ τεταγμένως ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ ΠΔΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ὡς δὲ ἡ ΕΚ πρὸς ΚΜ, ἡ ΕΝ πρὸς ΝΖ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΕΝΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. ἴσον δέ τι ὑπὸ ΕΝΖ τῷ ὑπὸ ΑΝΒ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ. τὸ δὲ ὑπὸ ΑΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΖ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΑΝ πρὸς ΝΖ καὶ τῆς ΒΝ πρὸς ΝΖ· ἀλλ' ὡς ⌊μὲν ἡ ΑΝ πρὸς ΝΖ, ἡ ΑΔ πρὸς ΔΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ, ὡς δὲ ἡ ΒΝ πρὸς ΝΖ, η ΖΟ πρὸς ΟΘ· ἡ ἄρα ΑΒ πρὸς ΒΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΟ πρὸς ΟΗ καὶ ἡ ΖΟ πρὸς ΟΘ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΓ, τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΟΘ. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΖΟ τῇ ΑΔ· πλαγία μὲν ἄρα πλευρά ἐστιν ἡ ΑΒ, ὀρθία δὲ ἡ ΒΓ· ταῦτα γὰρ ἐν τῷ ιβ' θεωρήματι δέδεικται.

2. ἐπιπέδῳ — 3. τέτμηται] om. V; addidi praeeuntibus Memo et Halleio (qui praeterea addunt καὶ ποιεῖ τομὴν τὸν ΗΠΘΡ κύκλον, cfr. p. 162, 6 sq., et lin. 3 post ὑποκειμένῳ uerba τέμνοντι τὴν βάσιν τοῦ κώνου). 27. τῷ ιβ'] ῶ β' V; corr. p.

etiam communis eorum sectio $\Pi\Delta P$ ad $ZH\Theta$ perpendicularis est [Eucl. XI, 19]; quare etiam ad omnes rectas eam tangentes et in eodem plano positas rectos angulos efficit [Eucl. XI def. 3]. et quoniam conus, cuius basis est $H\Theta$ circulus, uertex autem Z, plano sectus est ad triangulum $ZH\Theta$ perpendiculari, uerum etiam alio plano sectus est, subiacenti scilicet, secundum rectam $\Pi\Delta P$ ad $H\Delta\Theta$ perpendicularem, et communis sectio plani subiacentis trianguli que $HZ\Theta$, hoc est ΔB, ad B uersus producta cum HZ in A concurrit, propter ea, quae antea demonstrauimus [prop. XII], hyperbola erit $\Pi B P$, cuius uertex est B punctum, rectae autem ad $B\Delta$ ordinate ductae in recto angulo ducentur; nam rectae $\Pi\Delta P$ parallelae erunt. et quoniam est $AB:B\Gamma = EK:KM$, et $EK:KM = EN:NZ$ [Eucl. VI, 2] $= EN \times NZ : NZ^2$, erit

$$AB:B\Gamma = EN \times NZ : NZ^2.$$

est autem

$$EN \times NZ = AN \times NB \text{ [Eucl. III, 35].}$$

quare

$$AB:\Gamma B = AN \times NB : NZ^2.$$

est autem

$$AN \times NB : NZ^2 = (AN:NZ) \times (BN:NZ),$$

et

$$AN:NZ = A\Delta:\Delta H = ZO:OH \text{ [Eucl. VI, 4],}$$

et [ib.] $BN:NZ = ZO:O\Theta$. itaque

$$AB:B\Gamma = (ZO:OH) \times (ZO:O\Theta) = ZO^2 : HO \times O\Theta.$$

quare $AB:B\Gamma = ZO^2 : HO \times O\Theta$. et ZO rectae $A\Delta$ parallela est. ergo AB latus transuersum est, rectum autem $B\Gamma$; haec enim in propositione XII demonstrata sunt.

νε′.

Μὴ ἔστω δὴ ἡ δεδομένη γωνία ὀρθή, καὶ ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι εὐθεῖαι αἱ AB, $A\Gamma$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἴση τῇ ὑπὸ τῶν $BA\Theta$· δεῖ δὴ γράψαι ὑπερβολήν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ AB, ὀρθία δὲ ἡ $A\Gamma$, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν τῇ ὑπὸ ΘAB γωνίᾳ καταχθήσονται.

τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπὶ τῆς $A\Delta$ γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ $AZ\Delta$, καὶ ἤχθω τις εἰς τὸ ἡμικύκλιον παράλληλος τῇ $A\Theta$ ἡ ZH ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ ΔHA λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς $A\Gamma$ πρὸς AB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $Z\Theta\Delta$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Λ, καὶ τῶν $Z\Delta\Theta$ μέση ἀνάλογον ἔστω ἡ $\Delta\Lambda$, καὶ κείσθω τῇ $\Lambda\Delta$ ἴση ἡ ΔK, τῷ δὲ ἀπὸ τῆς ΛZ ἴσον ἔστω τὸ ὑπὸ ΛZM, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ KM, καὶ διὰ τοῦ Λ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω τῇ KZ ἡ ΛN καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν $K\Lambda$, ΛN γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς πλαγία μὲν πλευρὰ ἔσται ἡ $K\Lambda$, ὀρθία δὲ ἡ ΛN, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν διάμετρον ἀπὸ τῆς τομῆς ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται πλάτη ἔχουσαι τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ Λ ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ $K\Lambda N$· ἥξει δὲ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A· ἴσον γάρ ἐστι τὸ ἀπὸ ΛZ τῷ ὑπὸ ΛZM. καὶ ἐφάψεται αὐτῆς ἡ $A\Theta$· τὸ γὰρ ὑπὸ $Z\Delta\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $\Delta\Lambda$. ὥστε ἡ AB διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. καὶ ἐπεί ἐστιν ὡς

1. νε′] p, Eutocius; om. V. 3. αἱ] (alt.) p; om. V (ἡ Halley). 9. $AZ\Delta$] Δ e corr. m. 1 V. 12. AB] τὴν διπλασίαν τῆς $A\Delta$ Comm. fol. 38v cum Eutocio. 13. ἐπὶ τὸ Λ] scripsi coll. p. 170, 6; ἴση ἡ Λ V, ἡ $Z\Delta$ p; om. Memus, Comm., Halley. 14. ἴση] c, ι corr. ex η V. 15. τῆς ΛZ ἴσον] ἴσων V; corr. p. 17. ἐπὶ τὸ Ξ] ἐπὶ τὰ O, Ξ Halley. 20. ἔσται] ἔστω Halley praeeunte Comm. 22. ἔχουσαι] καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ΛN παρακείμενα ὀρθογώνια πλάτη ἔχοντα Halley praeeunte Commandino. 24. δέ] c et, ut uidetur, V; δή p, Halley.

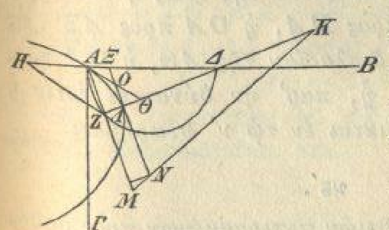
LV.

Iam igitur datus angulus rectus ne sit, et datae rectae sint AB, $A\Gamma$, datus autem angulus angulo $BA\Theta$ aequalis sit. oportet igitur hyperbolam describere, ita ut diametrus sit AB, latus rectum autem $A\Gamma$, et ordinate ductae in angulo ΘAB ducantur.

secetur AB in duas partes aequales in Δ, et in $A\Delta$ semicirculus describatur $AZ\Delta$, ad semicirculum autem recta ducatur ZH rectae $A\Theta$ parallela, quae faciat $ZH^2 : \Delta H \times HA = A\Gamma : AB$, ducaturque $Z\Theta\Delta$ et ad Λ uersus producatur, et sit $\Delta\Lambda$ rectarum $Z\Delta$, $\Delta\Theta$ media proportionalis, fiatque $\Delta K = \Lambda\Delta$,

$$\Lambda Z \times ZM = \Lambda Z^2,$$

et ducatur KM, per Λ autem ad KZ perpendicularis ducatur ΛN producaturque ad Ξ. et datis duabus rectis terminatis inter se perpendicularibus $K\Lambda$, ΛN hyperbola describatur, cuius latus transuersum sit $K\Lambda$, rectum autem ΛN, et rectae a sectione ad diametrum ductae in angulo recto ducantur latitudines habentes



rectas ab iis ad Λ abscisas excedentes figura simili rectangulo $K\Lambda \times \Lambda N$ [prop. LIV]; sectio igitur ea per A

ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, τουτέστι τὴν ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ διπλασία τῆς ΑΘ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ, τουτέστιν ἡ ΘΑ πρὸς ΑΔ, τουτέστιν ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ, ἡ ΓΑ ἄρα πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. ἔχει δὲ καὶ τὸ ἀπο ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗΑ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΖΗ πρὸς ΗΔ καὶ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ. κοινὸς ἀφῃρήσθω ὁ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΔ λόγος· ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ. ὡς δὲ ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ· ὡς ἄρα ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΘ, ἡ ΟΑ πρὸς ΑΞ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, παρ' ἣν δύνανταί ἐστιν ἡ ΑΓ· τοῦτο γὰρ δέδεικται ἐν τῷ ν' θεωρήματι.

νς'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις εὑρεῖν περὶ διάμετρον τὴν ἑτέραν αὐτῶν κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ἔλλειψιν ἐν τῷ αὐτῷ ἐπιπέδῳ ταῖς εὐθείαις, ἧς κορυφὴ ἔσται τὸ πρὸς τῇ ὀρθῇ γωνίᾳ σημεῖον, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν διάμετρον ἐν γωνίᾳ δοθείσῃ δυνήσονται τὰ

5. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. Halley. 22. νς'] p, Eutocius; om. V. 24. εὑρεῖν] εὕρῃ V; corr. p.

ueniet, quia $AZ^2 = AZ \times ZM$ [prop. XII]. et eam continget $A\Theta$ [prop. XXXVII]; nam $Z\varDelta \times \varDelta\Theta = \varDelta A^2$. quare AB diametrus sectionis est [prop. LI coroll.]. et quoniam est

$$\Gamma A : 2A\varDelta = \Gamma A : AB = ZH^2 : \varDelta H \times HA,$$

et

$$\Gamma A : 2A\varDelta = (\Gamma A : 2A\Theta) \times (2A\Theta : 2\varDelta A),$$

et

$$2A\Theta : 2\varDelta A = \Theta A : A\varDelta = ZH : H\varDelta \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

erit

$$\Gamma A : AB = (\Gamma A : 2A\Theta) \times (ZH : H\varDelta).$$

uerum etiam

$$ZH^2 : \varDelta H \times HA = (ZH : H\varDelta) \times (ZH : HA).$$

itaque

$$(\Gamma A : 2A\Theta) \times (ZH : H\varDelta) = (ZH : HA) \times (ZH : H\varDelta).$$

auferatur, quae communis est, ratio $ZH : H\varDelta$. itaque $\Gamma A : 2A\Theta = ZH : HA$. est autem [Eucl. VI, 4] $ZH : HA = OA : A\Xi$. itaque erit

$$\Gamma A : 2A\Theta = OA : A\Xi.$$

sin hoc est, parametrus est $A\Gamma$; hoc enim in propositione L demonstratum est.

LVI.

Datis duabus rectis terminatis inter se perpendicularibus circum alteram earum diametrum descriptam coni sectionem inuenire, ellipsis quae uocatur, in plano rectarum positam, ita ut uertex sit punctum ad rectum angulum positum, rectae autem a sectione ad diametrum in dato angulo ductae quadratae aequales sint rectangulis alteri rectae adplicatis latitudinem habentibus παρακείμενα ὀρθογώνια παρὰ τὴν ἑτέραν εὐθείαν πλάτος ἔχοντα τὴν ἀπολαμβανομένην ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ κορυφῇ τῆς τομῆς ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

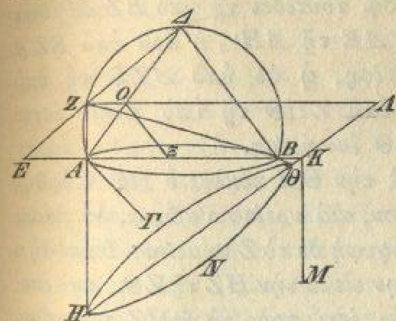
ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι αἱ AB, $A\Gamma$ πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις, ὧν μείζων ἡ AB· δεῖ δὴ ἐν τῷ ὑποκειμένῳ ἐπιπέδῳ γράψαι ἔλλειψιν, ἧς διάμετρος μὲν ἔσται ἡ AB, κορυφὴ δὲ τὸ A, ὀρθία δὲ ἡ $A\Gamma$, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἀπὸ τῆς τομῆς ἐπὶ τὴν AB ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ καὶ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν $A\Gamma$ παρακείμενα πλάτη ἔχοντα τὰς ἀπολαμβανομένας ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῷ A ἐλλείποντα εἴδει ὁμοίῳ τε καὶ ὁμοίως κειμένῳ τῷ ὑπὸ τῶν $BA\Gamma$.

ἔστω δὲ ἡ δοθεῖσα γωνία πρότερον ὀρθή, καὶ ἀνεστάτω ἀπὸ τῆς AB ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ ὑποκείμενον, καὶ ἐν αὐτῷ ἐπὶ τῆς AB τμῆμα κύκλου γεγράφθω τὸ $A\Delta B$, οὗ διχοτομία ἔστω τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΔA, ΔB, καὶ κείσθω τῇ $A\Gamma$ ἴση ἡ $A\Xi$, καὶ διὰ τοῦ Ξ τῇ ΔB παράλληλος ἤχθω ἡ ΞO, διὰ δὲ τοῦ O τῇ AB παράλληλος ἡ OZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔZ καὶ συμπιπτέτω τῇ AB ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ E· ἔσται δή, ὡς ἡ AB πρὸς $A\Gamma$, ἡ BA πρὸς $A\Xi$, τουτέστιν ἡ ΔA πρὸς AO, τουτέστιν ἡ ΔE πρὸς EZ. καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, ZB καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ZA τυχὸν σημεῖον τὸ H, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΔE παράλληλος ἤχθω ἡ HA καὶ συμπιπτέτω τῇ AB ἐκβληθείσῃ κατὰ τὸ K· ἐκβεβλήσθω δὴ ἡ ZO καὶ συμπιπτέτω τῇ HK κατὰ

13. τῷ] c, corr. ex τό m. 1 V. 15. δέ] fort. δή. δοθεῖσα] c, ϑ corr. ex δ m. 1 V.

rectam ab iis ad uerticem sectionis abscisam deficientibus figura simili similiterque posita rectangulo datis rectis comprehenso.

sint datae duae rectae AB, $A\Gamma$ inter se perpendiculares, quarum maior sit AB. oportet igitur in plano subiacenti ellipsim describere, ita ut eius diametrus sit AB, uertex autem A, latus rectum autem $A\Gamma$, et rectae ordinate a sectione ad AB ductae in dato angulo ducantur et quadratae aequales sint spatiis rectae $A\Gamma$ adplicatis latitudines habentibus rectas ab iis ad A abscisas deficientibus figura simili similiterque posita rectangulo $BA \times A\Gamma$.



prius igitur angulus datus rectus sit, et in AB planum ad subiacens perpendiculare erigatur, in eoque in AB segmentum circuli describatur $A\Delta B$, cuius punctum medium sit Δ, ducanturque ΔA, ΔB, et ponatur $A\Xi = A\Gamma$, per Ξ autem rectae ΔB parallela ducatur ΞO, per O autem rectae AB parallela OZ, et ducatur ΔZ concurratque cum AB producta in E. erit igitur [Eucl. V, 7]

$$AB : A\Gamma = BA : A\Xi = \Delta A : AO \text{ [Eucl. VI, 4]}$$
$$= \Delta E : EZ \text{ [Eucl. VI, 2]}.$$

ducantur AZ, ZB producanturque, et in ZA punctum

Figuram bis hab. V.

τὸ Λ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ περιφέρεια τῇ ΔΒ, ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΑΒΔ γωνία τῇ ὑπὸ ΔΖΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ γωνία δυσὶ ταῖς ὑπὸ ΖΔΑ, ΖΑΔ ἐστιν ἴση, ἀλλ' ἡ μὲν ὑπὸ ΖΑΔ τῇ ὑπὸ ΖΒΔ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΔΑ τῇ ὑπὸ ΖΒΑ, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΖΑ ἄρα τῇ ὑπὸ ΔΒΑ ἐστιν ἴση, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΒΖΔ. ἔστι δὲ καὶ παράλληλος ἡ ΔΕ τῇ ΛΗ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΕΖΑ τῇ ὑπὸ ΖΗΘ ἐστιν ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΒ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΖΗΘ τῇ ὑπὸ ΖΘΗ ἐστιν ἴση, καὶ ἡ ΖΗ τῇ ΖΘ ἐστιν ἴση.

γεγράφθω δὴ περὶ τὴν ΘΗ κύκλος ὁ ΗΘΝ ὀρθὸς πρὸς τὸ ΘΗΖ τρίγωνον, καὶ νοείσθω κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον· ἔσται δὴ ὁ κῶνος ὀρθὸς διὰ τὸ ἴσην εἶναι τὴν ΗΖ τῇ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ ὁ ΗΘΝ κύκλος ὀρθός ἐστι πρὸς τὸ ΘΗΖ ἐπίπεδον, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑποκείμενον ἐπίπεδον ὀρθὸν πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον, καὶ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἄρα πρὸς τὸ διὰ τῶν ΗΘΖ ἐπίπεδον ὀρθὴ ἔσται. ἔστω δὴ ἡ κοινὴ τομὴ αὐτῶν ἡ ΚΜ· ἡ ΚΜ ἄρα ὀρθή ἐστι πρὸς ἑκατέραν τῶν ΛΚ, ΚΗ. καὶ ἐπεὶ κῶνος, οὗ βάσις μὲν ὁ ΗΘΝ κύκλος, κορυφὴ δὲ τὸ Ζ σημεῖον, τέτμηται ἐπιπέδῳ διὰ τοῦ ἄξονος καὶ ποιεῖ τομὴν τὸ ΗΘΖ τρίγωνον, τέτμηται δὲ καὶ ἑτέρῳ ἐπιπέδῳ τῷ διὰ τῶν ΛΚ, ΚΜ, ὅ ἐστι τὸ ὑποκείμενον, κατ' εὐθεῖαν τὴν ΚΜ πρὸς ὀρθὰς οὖσαν τῇ ΗΚ, καὶ τὸ ἐπίπεδον συμπίπτει ταῖς ΖΗ, ΖΘ πλευραῖς τοῦ κώνου, ἡ ἄρα γινομένη τομὴ ἔλλειψίς ἐστιν, ἧς διάμετρος

3. ΖΔΑ, ΖΑΔ] scripsi; ΞΑΔ V (ΖΑΔ, ΑΔΖ p; ΖΑΔ, ΖΔΑ iam Halley praeeunte Memo). 4. ΖΑΔ] ΖΔΑ V; corr. p. ΖΒΔ] vp; Β e corr. m. 1 Vc. 5. ΖΒΑ] pvc; Β e corr. m. 1 V. 9. ΖΘΗ] (pr.) pvc; Η e corr. m. 1 V. ΖΘΗ] (alt.) pvc; Η e corr. m. 1 V. 13. ΗΘΝ] ΗΘΚ V; corr. p.

aliquod H sumatur, per id autem rectae ΔE parallela ducatur $H\Lambda$, quae cum AB producta in K concurrat. producatur igitur ZO et cum HK in Λ concurrat. quoniam igitur arcus $A\Delta$ arcui ΔB aequalis est, erit [Eucl. III, 27] $\angle AB\Delta = \angle \Delta ZB$. et quoniam est [Eucl. I, 32] $\angle EZA = Z\Delta A + ZA\Delta$, et

$$\angle ZA\Delta = \angle ZB\Delta,$$

$\angle Z\Delta A = \angle ZBA$ [Eucl. III, 27], erit etiam

$$\angle EZA = \angle \Delta BA = \angle BZ\Delta.$$

uerum etiam ΔE parallela est rectae ΛH. quare $\angle EZA = \angle ZH\Theta$, $\angle \Delta ZB = \angle Z\Theta H$ [Eucl. I, 29]. quare etiam $\angle ZH\Theta = \angle Z\Theta H$ et [Eucl. I, 6] $ZH = Z\Theta$.

describatur igitur circum ΘH circulus $H\Theta N$ ad triangulum ΘHZ perpendicularis, et fingatur conus, cuius basis sit $H\Theta N$ circulus, uertex autem Z punctum; conus igitur rectus erit, quia $HZ = Z\Theta$ [def. 3]. et quoniam circulus $H\Theta N$ ad planum ΘHZ perpendicularis est, uerum etiam planum subiacens ad planum rectarum $H\Theta$, ΘZ perpendiculare est, etiam communis eorum sectio ad planum rectarum $H\Theta$, ΘZ perpendicularis erit [Eucl. XI, 19]. KM igitur communis eorum sectio sit. itaque KM ad utramque ΛK, KH perpendicularis est [Eucl. XI def. 3]. et quoniam conus, cuius basis est $H\Theta N$ circulus, uertex autem Z punctum, plano per axem sectus est, quod sectionem efficit triangulum $H\Theta Z$, uerum etiam alio plano rectarum ΛK, KM, quod est planum subiacens, sectus est secundum rectam KM ad HK perpendicularem, et hoc planum cum ZH, $Z\Theta$ lateribus coni concurrit, sectio orta ellipsis est, cuius diametrus est AB, ordinate ductae autem in recto angulo ducentur ἐστιν ἡ AB, αἱ δὲ καταγόμεναι καταχθήσονται ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ· παράλληλοι γάρ εἰσι τῇ KM. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΔE πρὸς EZ, τὸ ὑπὸ ΔEZ, τουτέστι τὸ ὑπὸ BEA, πρὸς τὸ ἀπὸ EZ, τὸ δὲ ὑπὸ BEA πρὸς τὸ ἀπὸ EZ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς BE πρὸς EZ καὶ τοῦ τῆς AE πρὸς EZ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BE πρὸς EZ, ἡ BK πρὸς KΘ, ὡς δὲ ἡ AE πρὸς EZ, ἡ AK πρὸς KH, τουτέστιν ἡ ZΛ πρὸς ΛH, ἡ BA ἄρα πρὸς AΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ZΛ πρὸς ΛH καὶ τοῦ τῆς ZΛ πρὸς ΛΘ, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ ZΛ πρὸς τὸ ὑπὸ HΛΘ· ὡς ἄρα ἡ BA πρὸς AΓ, τὸ ἀπὸ ZΛ πρὸς τὸ ὑπὸ HΛΘ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ AΓ, ὡς δέδεικται ἐν τῷ ιγ' θεωρήματι.

νζ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ AB ἐλάσσων τῆς AΓ, καὶ δέον ἔστω περὶ διάμετρον τὴν AB γράψαι ἔλλειψιν, ὥστε ὀρθίαν εἶναι τὴν AΓ.

τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ EΔZ, καὶ τῷ ὑπὸ BAΓ ἴσον ἔστω τὸ ἀπὸ ZE, ὥστε ἴσην εἶναι τὴν ZΔ τῇ ΔE, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ ZH, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ AΓ πρὸς AB, ἡ EZ πρὸς ZH· μείζων ἄρα καὶ ἡ EZ τῆς ZH. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΓAB τῷ ἀπὸ EZ, ἔστιν ὡς ἡ ΓA πρὸς AB, τὸ ἀπὸ ZE πρὸς τὸ ἀπὸ AB καὶ τὸ ἀπὸ ΔZ πρὸς

---

7. Post KΘ add. τουτέστιν ἡ ZΛ πρὸς ΛΘ Halley praeeunte Memo. 14. τῷ ιγ'] ὦ Γ̄ V; corr. p. 16. νζ'] p, Eutocius; om. V. 18. περί] pc; ἐπί V? 24. πεποιείσθω V; corr. p. 26. ἀπό] pc, πό post ras. 1 litt. V.

[prop. XIII]; sunt enim rectae KM parallelae. et quoniam est

$$\Delta E : EZ = \Delta E \times EZ : EZ^2 = BE \times EA : EZ^2$$

[cfr. Eucl. III, 36], et

$$BE \times EA : EZ^2 = (BE : EZ) \times (AE : EZ),$$

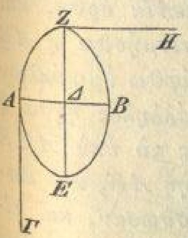
est autem $BE : EZ = BK : K\Theta$,

$$AE : EZ = AK : KH = Z\Lambda : \Lambda H \text{ [Eucl. VI, 4]},$$

erit $BA : A\Gamma = (Z\Lambda : \Lambda H) \times (Z\Lambda : \Lambda\Theta)$ [ibid.]. et $(Z\Lambda : \Lambda H) \times (Z\Lambda : \Lambda\Theta) = Z\Lambda^2 : H\Lambda \times \Lambda\Theta$. quare $BA : A\Gamma = Z\Lambda^2 : H\Lambda \times \Lambda\Theta$. sin hoc est, $A\Gamma$ latus rectum est sectionis, ut in propositione XIII demonstratum est.

LVII.

Iisdem suppositis sit $AB < A\Gamma$, et oporteat circum AB diametrum ellipsim describere, ita ut $A\Gamma$ latus rectum sit.



AB in Δ in duas partes aequales secetur, et a Δ ad AB perpendicularis ducatur $E\Delta Z$, et sit

$$ZE^2 = BA \times A\Gamma,$$

ita ut sit $Z\Delta = \Delta E$, rectae autem AB parallela ducatur ZH, et fiat

$$A\Gamma : AB = EZ : ZH;$$

itaque $EZ > ZH$ [Eucl. V, 14]. et quoniam est $\Gamma A \times AB = EZ^2$, erit

$$\Gamma A : AB = ZE^2 : AB^2 \text{ [Eucl. VI, 17; V def. 9]}$$
$$= \Delta Z^2 : \Delta A^2 \text{ [Eucl. V, 15]}.$$

est autem $\Gamma A : AB = EZ : ZH$. quare etiam

Figuram bis V.

τὸ ἀπὸ ΔA. ὡς δὲ ἡ ΓA πρὸς AB, ἡ EZ πρὸς ZH· ὡς ἄρα ἡ EZ πρὸς ZH, τὸ ἀπὸ $Z\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA. τὸ δὲ ἀπὸ $Z\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $Z\Delta E$· ὡς ἄρα ἡ EZ πρὸς ZH, τὸ ὑπὸ $E\Delta Z$ πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Delta$. δύο οὖν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων καὶ μείζονος οὔσης τῆς EZ γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος μὲν ἡ EZ, ὀρθία δὲ ἡ ZH· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ A διὰ τὸ εἶναι ὡς τὸ ὑπὸ $Z\Delta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA, ἡ EZ πρὸς ZH. καί ἐστιν ἴση ἡ $A\Delta$ τῇ ΔB· ἐλεύσεται οὖν καὶ διὰ τοῦ B. γέγραπται οὖν ἔλλειψις περὶ τὴν AB. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓA πρὸς AB, τὸ ἀπὸ $Z\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔA, το δὲ ἀπὸ ΔA ἴσον τῷ ὑπὸ $A\Delta B$, ὡς ἄρα ἡ ΓA πρὸς AB, τὸ ἀπὸ ΔZ πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Delta B$. ὥστε ὀρθία ἐστὶν ἡ $A\Gamma$.

νη΄.

Ἀλλὰ δὴ μὴ ἔστω ἡ δοθεῖσα γωνία ὀρθή, καὶ ἔστω αὐτῇ ἴση η ὑπὸ $BA\Delta$, καὶ τετμήσθω ἡ AB δίχα κατὰ τὸ E, καὶ ἐπὶ τῆς AE γεγράφθω ἡμικύκλιον τὸ AZE, καὶ ἐν αὐτῷ τῇ $A\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ ZH ποιοῦσα τὸν τοῦ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ὑπὸ AHE λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς ΓA πρὸς τὴν AB, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AZ, EZ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τῶν ΔEZ μέση ἀνάλογον ἡ $E\Theta$, καὶ τῇ $E\Theta$ ἴση κείσθω ἡ EK, καὶ πεποιήσθω τῷ ἀπὸ AZ ἴσον τὸ ὑπὸ $\Theta Z\Lambda$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $K\Lambda$, καὶ ἀπὸ τοῦ Θ τῇ ΘZ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ $\Theta M\Xi$ παράλληλος γινομένη τῇ $AZ\Lambda$· ὀρθὴ γὰρ ἡ πρὸς τῷ Z. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πεπερασμένων πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν

9. ἡ] (pr.) debuit τήν. 16. νη΄] p, Eutocius; om. V. 27. $\Theta M\Xi$] fort. ΘM; $\overline{\mu\vartheta}$, ϑ e corr., p.

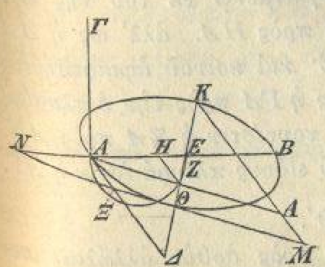
$EZ : ZH = Z\Delta^2 : \Delta A^2$. est autem $Z\Delta^2 = Z\Delta \times \Delta E$; itaque $EZ : ZH = E\Delta \times \Delta Z : A\Delta^2$. duabus igitur rectis terminatis inter se perpendicularibus positis, quarum maior est EZ, describatur ellipsis, cuius diametrus sit EZ, latus rectum autem ZH [prop. LVI]; sectio igitur per A ueniet, quia est

$$Z\Delta \times \Delta E : \Delta A^2 = EZ : ZH \text{ [prop. XXI]}.$$

et $A\Delta = \Delta B$; quare etiam per B ueniet [ibid.]. itaque circum AB ellipsis descripta est. et quoniam est $\Gamma A : AB = Z\Delta^2 : \Delta A^2$, et $\Delta A^2 = A\Delta \times \Delta B$, erit $\Gamma A : AB = \Delta Z^2 : A\Delta \times \Delta B$. ergo $A\Gamma$ latus rectum est [prop. XXI].

LVIII.

Iam uero datus angulus rectus ne sit, eique aequalis sit $\angle BA\Delta$, et AB in E in duas partes aequales secetur, in AE autem semicirculus describatur AZE, et in eo rectae $A\Delta$ parallela ducatur ZH, quae efficiat $ZH^2 : AH \times HE = \Gamma A : AB$, et ducantur AZ, EZ producanturque, et inter ΔE, EZ media proportionalis sit $E\Theta$, ponaturque $EK = E\Theta$, et fiat $\Theta Z \times Z\Lambda = AZ^2$,



ducaturque $K\Lambda$, a Θ autem ad rectam ΘZ perpendicularis ducatur $\Theta M\Xi$, quae rectae $AZ\Lambda$ parallela fit [Eucl. I, 28]; nam angulus ad Z positus rectus est [Eucl. III, 31]. et datis duabus rectis terminatis inter se perpendicularibus $K\Theta$, ΘM describatur ellipsis, ΚΘ, ΘΜ γεγράφθω ἔλλειψις, ἧς διάμετρος πλαγία ἡ ΚΘ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘΜ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ΘΚ ἐν ὀρθῇ γωνίᾳ καταχθήσονται· ἥξει δὴ ἡ τομὴ διὰ τοῦ Α διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ἀπὸ ΖΑ τῷ ὑπὸ ΘΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ΘΕ τῇ ΕΚ, ἡ δὲ ΑΕ τῇ ΕΒ, ἥξει καὶ διὰ τοῦ Β ἡ τομή, καὶ ἔσται κέντρον μὲν τὸ Ε, διάμετρος δὲ ἡ ΑΕΒ. καὶ ἐφάψεται τῆς τομῆς ἡ ΔΑ διὰ τὸ ἴσον εἶναι τὸ ὑπὸ ΔΕΖ τῷ ἀπὸ ΕΘ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΒ, τὸ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ, ἀλλ' ἡ μὲν ΓΑ πρὸς ΑΒ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΔΑ καὶ τοῦ τῆς διπλασίας τῆς ΑΔ πρὸς τὴν ΑΒ, τουτέστι τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ, τὸ δὲ ἀπὸ ΖΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΕ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ, ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ καὶ τοῦ τῆς ΔΑ πρὸς ΑΕ ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ ἐκ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΕ καὶ τοῦ τῆς ΖΗ πρὸς ΗΑ. ἀλλ' ὡς ἡ ΔΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ· καὶ κοινοῦ ἀφαιρεθέντος τούτου τοῦ λόγου ἔσται ὡς ἡ ΓΑ πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς ΑΔ, ἡ ΖΗ πρὸς ΗΑ, τουτέστιν ἡ ΞΑ πρὸς ΑΝ. ὅταν δὲ τοῦτο ᾖ, ὀρθία τοῦ εἴδους πλευρά ἐστιν ἡ ΑΓ.

νθ΄.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμένων εὑρεῖν ἀντικειμένας, ὧν διάμετρός ἐστι μία τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν, κορυφὴ δὲ τὰ πέρατα τῆς εὐθείας, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐν ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν ἐν

18. ΖΗ] pc, Ζ e corr. m. 1 V. 20. καὶ κοινοῦ] p, κοινοῦ V, κοινοῦ ἄρα Comm. 24. νθ΄] p, Eutocius; om. V. 27. κορυφαί p.

ita ut diametrus transuersa sit $K\Theta$, latus autem rectum figurae ΘM, et rectae ad ΘK ordinate ductae in angulo recto ducantur [prop. LVI—LVII]. sectio igitur per A ueniet, quia $ZA^2 = \Theta Z \times ZA$ [prop. XIII]. et quoniam est $\Theta E = EK$, $AE = EB$, sectio etiam per B ueniet, et E centrum erit, diametrus autem AEB [prop. LI coroll.]. et ΔA sectionem continget [prop. XXXVIII], quia $\Delta E \times EZ = E\Theta^2$. et quoniam est

$$\Gamma A : AB = ZH^2 : AH \times HE,$$

est autem

$$\Gamma A : AB = (\Gamma A : 2\Delta A) \times (2A\Delta : AB) = (\Gamma A : 2\Delta A) \times (\Delta A : AE),$$

et

$$ZH^2 : AH \times HE = (ZH : HE) \times (ZH : HA),$$

erit

$$(\Gamma A : 2A\Delta) \times (\Delta A : AE) = (ZH : HE) \times (ZH : HA).$$

uerum

$$\Delta A : AE = ZH : HE \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

hac igitur ratione, quae communis est, ablata erit

$$\Gamma A : 2A\Delta = ZH : HA = \Xi A : AN \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

sin hoc est, latus rectum figurae est $A\Gamma$ [prop. L].

LIX.

Datis duabus rectis terminatis inter se perpendicularibus oppositas inuenire, ita ut earum diametrus sit alterutra datarum rectarum, uertex autem termini rectae, et rectae in alterutra sectionum in angulo dato ductae quadratae aequales sint spatiis alteri adplicatis et τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ δυνήσονται τὰ παρὰ τὴν ἑτέραν παρακείμενα καὶ ὑπερβάλλοντα ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ τῶν δοθεισῶν εὐθειῶν περιεχομένῳ.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις πεπερασμέναι αἱ BE, $B\Theta$, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ H· δεῖ δὴ γράψαι ἀντικειμένας περὶ μίαν τῶν BE, $B\Theta$, ὥστε τὰς καταγομένας κατάγεσθαι ἐν γωνίᾳ τῇ H.

καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν τῶν BE, $B\Theta$ γεγράφθω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἔσται πλαγία ἡ BE, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΘB, αἱ δὲ καταγόμεναι ἐπὶ τὴν ἐπ' εὐθείας τῇ BE καταχθήσονται ἐν γωνίᾳ τῇ H, καὶ ἔστω ἡ $AB\Gamma$· τοῦτο γὰρ ὡς δεῖ γενέσθαι, προγέγραπται. ἤχθω δὴ διὰ τοῦ E τῇ BE πρὸς ὀρθὰς ἡ EK ἴση οὖσα τῇ $B\Theta$, καὶ γεγράφθω ὁμοίως ἄλλη ὑπερβολὴ ἡ ΔEZ, ἧς διάμετρος μὲν ἡ BE, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ EK, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῆς τομῆς τεταγμένως καταχθήσονται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῇ H. φανερὸν δή, ὅτι αἱ B, E εἰσιν ἀντικείμεναι, διάμετρος δὲ αὐτῶν μία ἐστί, καὶ αἱ ὀρθίαι ἴσαι.

ξ'.

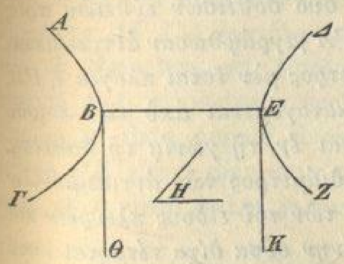
Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν δίχα τεμνουσῶν ἀλλήλας γράψαι περὶ ἑκατέραν αὐτῶν ἀντικειμένας τομάς, ὥστε εἶναι αὐτῶν συζυγεῖς διαμέτρους τὰς εὐθείας, καὶ τὴν τῶν δύο ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντι-

6. δή] c, δή uel δέ corr. ex δεῖ p („utique" Comm.), δεῖ V; om. Halley cum Memo. 18. ἐφεξῆς] male del. Halley. 19. δή] corr. ex δέ m. 1 V. 20. αἱ ὀρθίαι] scripsi; διορθιαι (sic) V; ὀρθίαι p et post lacunam c, Halley. 21. ξ'] p, Eutocius; om. V.

figura excedentibus simili rectangulo datis rectis comprehenso.

sint datae duae rectae terminatae inter se perpendiculares BE, $B\Theta$, datus autem angulus sit H. oportet igitur circum alterutram rectarum BE, $B\Theta$ oppositas describere, ita ut rectae ordinatae in angulo H ducantur.

et datis duabus rectis BE, $B\Theta$ describatur hyperbola, ita ut diametrus transuersa sit BE, latus autem rectum figurae ΘB, et rectae ad BE productam ordinate ductae in angulo H ducantur; quo modo enim hoc fieri possit, antea expositum est [prop. LV]. ducatur igitur per E ad BE perpendicularis EK, quae aequalis sit rectae $B\Theta$, et eodem modo alia hyperbola describatur ΔEZ, ita ut diametrus sit BE, latus autem rectum figurae EK, et rectae a sectione ordinate ductae in angulo ducantur, qui angulo H deinceps positus est [prop. LV]. manifestum est igitur, sectiones B, E oppositas esse et unam eandemque diametrum habere, lateraque recta aequalia esse.



LX.

Datis duabus rectis inter se in binas partes aequales secantibus circum utramque sectiones oppositas describere, ita ut diametri earum coniugatae sint rectae datae, et diametrus duarum oppositarum quadrata aequalis sit figurae alterarum oppositarum, similiter-κειμένων δύνασθαι εἶδος, ὁμοίως δὲ καὶ τὴν τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων διάμετρον τὸ τῶν ἑτέρων ἀντικειμένων δύνασθαι εἶδος.

ἔστωσαν αἱ δοθεῖσαι δύο εὐθεῖαι δίχα τέμνουσαι ἀλλήλας αἱ ΑΓ, ΔΕ· δεῖ δὴ περὶ ἑκατέραν αὐτῶν διάμετρον γράψαι ἀντικειμένας, ἵνα ὦσιν αἱ ΑΓ, ΔΕ συζυγεῖς ἐν αὐταῖς, καὶ η μὲν ΔΕ τὸ τῶν περὶ τὴν ΑΓ εἶδος δύνηται, ἡ δὲ ΑΓ τὸ τῶν περὶ τὴν ΔΕ.

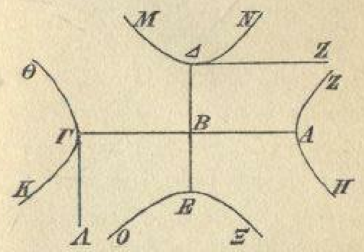
ἔστω τῷ ἀπὸ ΔΕ ἴσον τὸ ὑπὸ ΑΓΛ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ɣ ΑΓ τῇ ΓΛ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις τῶν ΑΓ, ΓΛ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΖΑΗ, ΘΓΚ, ὧν διάμετρος μὲν ἔσται πλαγία ἡ ΓΑ, ὀρθία δὲ ἡ ΓΛ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν ἐπὶ τὴν ΓΑ καταχθήσονται ἐν τῇ γωνίᾳ τῇ δοθείσῃ. ἔσται δὴ ἡ ΔΕ δευτέρα διάμετρος τῶν ἀντικειμένων· μέσον τε γὰρ λόγον ἔχει τῶν τοῦ εἴδους πλευρῶν καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην οὖσα δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Β. ἔστω δὴ πάλιν τῷ ἀπὸ ΑΓ ἴσον τὸ ὑπὸ ΔΕ, ΔΖ, πρὸς ὀρθὰς δὲ ἔστω ἡ ΔΖ τῇ ΔΕ. καὶ δύο δοθεισῶν εὐθειῶν πρὸς ὀρθὰς ἀλλήλαις κειμένων τῶν ΕΔ, ΔΖ γεγράφθωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΜΔΝ, ΟΕΞ, ὧν διάμετρος μὲν πλαγία ἡ ΔΕ, ὀρθία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἡ ΔΖ, αἱ δὲ καταγόμεναι ἀπὸ τῶν τομῶν καταχθήσονται ἐπὶ τὴν ΔΕ ἐν τῇ δοθείσῃ γωνίᾳ· ἔσται δὴ καὶ τῶν ΜΔΝ, ΞΕΟ δευτέρα διάμετρος ἡ ΑΓ. ὥστε

6. ΑΓ] ΑΒ V; corr. p. 10. ΑΓ] ΑΓ V; corr. Memus („gl"). 12. ΓΛ] ΓΔ V; corr. p. 15. δή] Halley, δέ V p c. 17. παρὰ τεταγμένως, litt. ς euan., V. κατηγμένην] scripsi; κατηγμένη V. 18. ΔΖ] ΔΡ Halley cum Comm. 19. ΔΖ] ΔΡ Halley cum Comm. 20. ΔΖ] ΔΡ Halley cum Comm. 21. ΜΔΝ, ΟΕΞ] ΜΔ, ΝΟΞ V; corr. p. 23. ΔΖ] ΔΡ Halley cum Comm. (etiam in figura litteram Z bis habet V). 25. καί] καὶ περί V; corr. p; fort. scr. καὶ ἐπί.

que etiam diametrus alterarum oppositarum quadrata aequalis sit figurae alterarum oppositarum.

sint datae duae rectae inter se in binas partes aequales secantes $A\Gamma$, ΔE. oportet igitur circum utramque diametrum oppositas describere, ita ut $A\Gamma$, ΔE in iis coniugatae sint, et ΔE^2 aequalis sit figurae oppositarum circum $A\Gamma$ descriptarum, $A\Gamma^2$ autem figurae oppositarum circum ΔE.

sit $A\Gamma \times \Gamma\Lambda = \Delta E^2$, et $A\Gamma$ ad $\Gamma\Lambda$ perpendicularis sit. et datis duabus rectis inter se perpendicularibus $A\Gamma$, $\Gamma\Lambda$ describantur oppositae ZAH, $\Theta\Gamma K$, ita ut diametrus sit transuersa ΓA, latus autem rectum $\Gamma\Lambda$, et rectae a sectionibus ad ΓA ordinate ductae in dato angulo ducantur [prop. LIX]. erit igitur ΔE altera diametrus oppositarum [deff. alt. 3]; nam et mediam habet rationem inter latera figurae



[Eucl. VI, 17] et rectae ordinate ductae parallela in B in duas partes aequales secta est. rursus igitur sit $\Delta E \times \Delta Z = A\Gamma^2$, et ΔZ ad ΔE perpendicularis sit. et datis duabus rectis inter se perpendicularibus positis $E\Delta$, ΔZ oppositae describantur $M\Delta N$, $OE\Xi$, ita ut diametrus transuersa sit ΔE, latus autem rectum figurae ΔZ, et rectae a sectionibus ordinate ἡ μὲν $ΑΓ$ τὰς τῇ $ΔΕ$ παραλλήλους μεταξὺ τῶν $ΖΑΗ$, $ΘΓΚ$ τομῶν δίχα τέμνει, ἡ δὲ $ΔΕ$ τὰς τῇ $ΑΓ$· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

καλείσθωσαν δὲ αὗται αἱ τομαὶ συζυγεῖς.

In fine: Ἀπολλωνίου κωνικῶν $\bar{α}^{ον}$ m. 2 V.

ductae ad $ΔΕ$ in dato angulo ducantur [prop. LIX]; erit igitur etiam $ΑΓ$ altera diametrus sectionum $ΜΔΝ$, $ΞΕΟ$ [deff. alt. 3]. ergo $ΑΓ$ rectas rectae $ΔΕ$ parallelas inter sectiones $ΖΑΗ$, $ΘΓΚ$ positas in binas partes aequales secat, $ΔΕ$ autem rectas rectae $ΑΓ$ parallelas [prop. XVI]; quod oportebat fieri [cfr. def. 6].

tales autem sectiones coniugatae uocentur.

ΚΩΝΙΚΩΝ β′.

Ἀπολλώνιος Εὐδήμῳ χαίρειν.

Εἰ ὑγιαίνεις, ἔχοι ἂν καλῶς· καὶ αὐτὸς δὲ μετρίως ἔχω.

Ἀπολλώνιον τὸν υἱόν μου πέπομφα πρός σε κομίζοντά σοι τὸ β′ βιβλίον τῶν συντεταγμένων ἡμῖν κωνικῶν. δίελθε οὖν αὐτὸ ἐπιμελῶς καὶ τοῖς ἀξίοις τῶν τοιούτων κοινωνεῖν μεταδίδου· καὶ Φιλωνίδης δὲ ὁ γεωμέτρης, ὃν καὶ συνέστησά σοι ἐν Ἐφέσῳ, ἐάν ποτε ἐπιβαλῇ εἰς τοὺς κατὰ Πέργαμον τόπους, μετάδὸς αὐτῷ, καὶ σεαυτοῦ ἐπιμελοῦ, ἵνα ὑγιαίνῃς. εὐτύχει.

α′.

Ἐὰν ὑπερβολῆς κατὰ κορυφὴν εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ἀπ᾽ αὐτῆς ἐφ᾽ ἑκάτερα τῆς διαμέτρου ἀποληφθῇ ἴση τῇ δυναμένῃ τὸ τέταρτον τοῦ εἴδους, αἱ ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ληφθέντα πέρατα τῆς ἐφαπτομένης ἀγόμεναι εὐθεῖαι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς διάμετρος ἡ AB, *κέντρον δὲ τὸ* Γ, *ὀρθία δὲ ἡ* BZ, *καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς κατὰ τὸ* B *ἡ* ΔE, *καὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν* ABZ *εἴδους ἴσον ἔστω τὸ ἀφ᾽ ἑκατέρας τῶν* $B\Delta$, BE, *καὶ ἐπι-*

Ἀπολλωνίου κωνικῶν $\overline{\beta}^{ov}$ (β m. 2) V, et v (β corr. ex α m. 2). 3. *ὑγιαίνοις* p. 12. α'] vp, om. V, ut deinceps.

CONICORUM LIBER II.

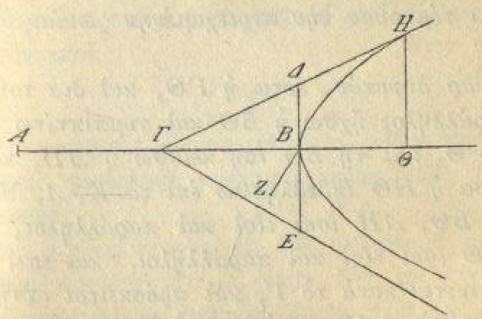
Apollonius Eudemo s.

Si uales, bene est; equidem satis ualeo.

Apollonium filium ad te misi secundum librum conicorum a me conscriptorum perlaturum. eum igitur diligenter peruolue et cum iis communica, qui talibus rebus digni sunt. et cum Philonide quoque geometra, quem tibi Ephesi commendaui, si quando ad uiciniam Pergami uenerit, eum communica, atque cura, ut ualeas. uale.

I.

Si recta hyperbolam in uertice contingit, et ex ea in utramque partem diametri recta aufertur aequalis



rectae, quae quadrata quartae parti figurae aequalis est, rectae a centro sectionis ad terminos sumptos contingentis ductae cum sectione non concurrent.

ζευχθεῖσαι αἱ ΓΔ, ΓΕ ἐκβεβλήσθωσαν. λέγω, ὅτι οὐ συμπεσοῦνται τῇ τομῇ.

εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῇ τομῇ κατὰ τὸ Η, καὶ ἀπὸ τοῦ Η τεταγμένως κατήχθω ἡ ΗΘ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΑΒ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΒΖ, ἀλλὰ τοῦ μὲν ἀπο ΑΒ τέταρτον μέρος τὸ ἀπὸ ΓΒ, τοῦ δὲ ὑπὸ ΑΒΖ τέταρτον τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς ἄρα ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ, τὸ ὑπὸ ΑΘΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘΗ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΑΘΒ τῷ ἀπὸ ΓΘ· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ ΓΔ συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἡ ΓΕ· ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῇ τομῇ αἱ ΓΔ, ΓΕ.

β'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι ἑτέρα ἀσύμπτωτος οὐκ ἔστι τέμνουσα τὴν περιεχομένην γωνίαν ὑπὸ τῶν ΔΓΕ.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ ΓΘ, καὶ διὰ τοῦ Β τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΒΘ καὶ συμπιπτέτω τῇ ΓΘ κατὰ τὸ Θ, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΔΗ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Κ, Λ, Μ. ἐπεὶ οὖν αἱ ΒΘ, ΔΗ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι, καὶ αἱ ΔΒ, ΗΘ ἴσαι εἰσὶ καὶ παράλληλοι. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΒ δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Γ, καὶ πρόσκειται αὐτῇ τις ἡ ΒΛ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΓΒ ἴσον ἐστὶ τῷ

4. τοῦ] p, τῆς V. 5. ἡ] p, om. V. 10. ΘΗ] c, e corr. m. 1 V. 11. ΑΘΒ] ΑΒΘ V; ΑΘ, ΘΒ p.

sit hyperbola, cuius diametrus sit AB, centrum autem Γ, latus rectum autem BZ, et ΔE sectionem in B contingat, sit autem

$$B\Delta^2 = BE^2 = \tfrac{1}{4} AB \times BZ,$$

et ductae $\Gamma\Delta$, ΓE producantur. dico, eas cum sectione non concurrere.

nam si fieri potest, $\Gamma\Delta$ cum sectione in H concurrat, et ab H ordinate ducatur $H\Theta$; erit igitur rectae ΔB parallela [cfr. I, 17]. quoniam igitur est $AB : BZ = AB^2 : AB \times BZ$, et $\Gamma B^2 = \frac{1}{4} AB^2$,

$$B\Delta^2 = \tfrac{1}{4} AB \times BZ,$$

erit $AB : BZ = \Gamma B^2 : \Delta B^2 = \Gamma\Theta^2 : \Theta H^2$ [Eucl. VI, 4]. est autem etiam $AB : BZ = A\Theta \times \Theta B : \Theta H^2$ [I, 21]. itaque $\Gamma\Theta^2 : \Theta H^2 = A\Theta \times \Theta B : \Theta H^2$. quare

$$A\Theta \times \Theta B = \Gamma\Theta^2 \text{ [Eucl. V, 9];}$$

quod absurdum est [Eucl. II, 6]. ergo $\Gamma\Delta$ cum sectione non concurret. iam similiter demonstrabimus, ne ΓE quidem concurrere. ergo $\Gamma\Delta$, ΓE asymptotae sectionis sunt.

II.

Iisdem positis demonstrandum, aliam asymptotam non esse secantem angulum rectis $\Delta\Gamma$, ΓE comprehensum.

nam si fieri potest, sit $\Gamma\Theta$, et per B rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur $B\Theta$ et cum $\Gamma\Theta$ in Θ concurrat, ponaturque $\Delta H = B\Theta$, et ducta $H\Theta$ ad K, Λ, M producatur. iam quoniam $B\Theta$, ΔH aequales sunt et parallelae, etiam ΔB, $H\Theta$ aequales sunt et parallelae [Eucl. I, 33]. et quoniam AB in Γ in duas partes ἀπὸ ΓΛ. ὁμοίως δὴ ἐπειδὴ παράλληλός ἐστιν ἡ ΗΜ τῇ ΔΕ, καὶ ἴση ἡ ΔΒ τῇ ΒΕ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΗΛ τῇ ΛΜ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΗΘ τῇ ΔΒ, μείζων ἄρα ἡ ΗΚ τῆς ΔΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΚΜ τῆς ΒΕ μείζων, ἐπεὶ καὶ ἡ ΛΜ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΚΗ μεῖζόν ἐστι τοῦ ὑπὸ ΔΒΕ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΔΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΒ πρὸς ΒΖ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΛΗ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΚ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΜΚΗ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΒ. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΒ τῷ ὑπὸ ΜΚΗ· ὅπερ ἄτοπον· μεῖζον γὰρ αὐτοῦ δέδεικται. οὐκ ἄρα ἡ ΓΘ ἀσύμπτωτός ἐστι τῇ τομῇ.

γ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐφάπτηται, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἀφήν, καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν τμημάτων αὐτῆς τετράγωνον ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ γινομένου εἴδους πρὸς τῇ διὰ τῆς ἀφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

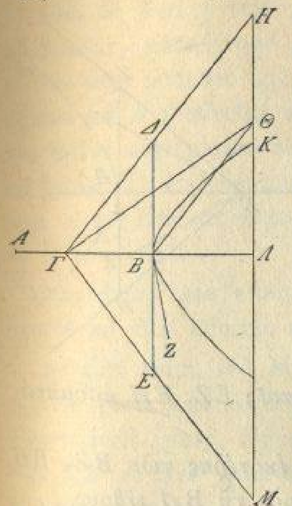
ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, κέντρον δὲ αὐτῆς τὸ Ε καὶ ἀσύμπτωτοι αἱ ΖΕ, ΕΗ, καὶ ἐφαπτέσθω τις αὐτῆς

9. Post pr. ἀπό ins. ΛΗ καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΗ τὸ ὑπὸ ΑΛΒ πρὸς τὸ ἀπό V (ex lin. 10—11 petita). 15. ΜΚΗ] ante Η eras. 1 litt. V. τό] (pr.) τ supra scr. m. 1 V. 18. ΓΘ] p, ΓΔ V.

aequales secta est, eique adiecta est $B\Lambda$, erit

$$A\Lambda \times \Lambda B + \Gamma B^2 = \Gamma\Lambda^2 \text{ [Eucl. II, 6].}$$

iam eodem modo, quoniam HM rectae ΔE parallela est, et $\Delta B = BE$, erit etiam $H\Lambda = \Lambda M$ [Eucl. VI, 1].



et quoniam est $H\Theta = \Delta B$, erit $HK > \Delta B$. uerum etiam $KM > BE$, quoniam etiam $\Lambda M > BE$. itaque

$$MK \times KH > \Delta B \times BE,$$

h. e. $> \Delta B^2$. quoniam igitur $AB : BZ = \Gamma B^2 : B\Delta^2$ [prop. I], uerum [I, 21]

$$AB : BZ = A\Lambda \times \Lambda B : \Lambda K^2,$$

et [Eucl. VI, 4]

$$\Gamma B^2 : B\Delta^2 = \Gamma\Lambda^2 : \Lambda H^2,$$

erit etiam

$$\Gamma\Lambda^2 : \Lambda H^2 = A\Lambda \times \Lambda B : \Lambda K^2.$$

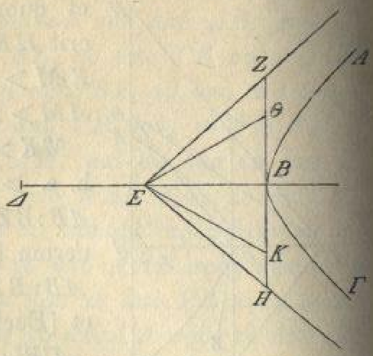
quoniam igitur est, ut totum $\Lambda\Gamma^2$ ad totum ΛH^2, ita ablatum $A\Lambda \times \Lambda B$ ad ablatum ΛK^2, erit etiam reliquum $\Gamma B^2 : MK \times KH$ [Eucl. II, 5] $= \Gamma\Lambda^2 : \Lambda H^2$ [Eucl. V, 19] $= \Gamma B^2 : \Delta B^2$. itaque $\Delta B^2 = MK \times KH$ [Eucl. V, 9]; quod absurdum est; demonstrauimus enim, esse $MK \times KH > \Delta B^2$. ergo $\Gamma\Theta$ asymptota sectionis non est.

III.

Si recta hyperbolam contingit, utrique asymptotae concurret et in puncto contactus in duas partes aequales secabitur, quadratumque utriusque partis eius aequale erit quartae parti figurae ad diametrum per punctum contactus ductam effectae.

κατὰ τὸ Β ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἡ ΘΚ συμπεσεῖται ταῖς ΖΕ, ΕΗ.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΒ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΕΔ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΒΔ. κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΘΒ, ΒΚ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΕΘ, ΕΚ. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσίν· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ αἱ ΖΕ, ΕΗ ἀσύμπτωτοι. ἡ ἄρα ΚΘ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ΕΖ, ΕΗ ἀσυμπτώτοις κατὰ τὰ Ζ, Η.



λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΖ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω τῷ τετάρτῳ τοῦ εἴδους ἴσον τὸ ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΒΘ, ΒΚ. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ ΘΕ, ΕΚ· ὅπερ ἄτοπον. τὸ ἄρα ἀφ' ἑκατέρας τῶν ΖΒ, ΒΗ ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΒΔ εἴδους.

δ'.

Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν γωνίαν περιεχουσῶν καὶ σημείου ἐντὸς τῆς γωνίας γράψαι διὰ τοῦ σημείου κώνου τομὴν τὴν καλουμένην ὑπερβολήν, ὥστε ἀσυμπτώτους αὐτῆς εἶναι τὰς δοθείσας εὐθείας.

---

1. ἡ] (pr.) ἢ V; corr. p. 18. ὅτι] p, om. V. 20. εἰ] p, ἢ V; corr. m. 2 v. 21. ΒΚ] p, ΘΚ V.

sit hyperbola ΑΒΓ, centrum autem eius Ε et asymptotae ΖΕ, ΕΗ, eamque contingat in Β recta aliqua ΘΚ. dico, ΘΚ productam cum ΖΕ, ΕΗ concurrere.

nam si fieri potest, ne concurrat, et ducta ΕΒ producatur, ponaturque ΕΔ = ΒΕ; ΒΔ igitur diametrus est. ponatur igitur ΘB^2 et BK^2 quartae parti figurae ad ΒΔ effectae aequale, ducanturque ΕΘ, ΕΚ. hae igitur asymptotae sunt [prop. I]; quod absurdum est [prop. II]; supposuimus enim, ΖΕ, ΕΗ asymptotas esse. ergo ΚΘ producta cum asymptotis ΕΖ, ΕΗ in Ζ, Η concurret.

iam dico, esse etiam BZ^2 et BH^2 quartae parti figurae ad ΒΔ effectae aequalia.

ne sint enim, sed, si fieri potest, sit $B\Theta^2$ et BK^2 quartae parti figurae aequale. itaque ΘΕ, ΕΚ asymptotae sunt [prop. I]; quod absurdum est [prop. II]. ergo ZB^2 et BH^2 quartae parti figurae ad ΒΔ effectae aequalia sunt.

IV.

Datis duabus rectis angulum comprehendentibus punctoque intra angulum posito per punctum coni sectionem, hyperbola quae uocatur, ita describere, ut datae rectae asymptotae sint.

sint duae rectae ΑΓ, ΑΒ quemuis angulum comprehendentes ad Α positum, datumque sit punctum aliquod Δ, et oporteat per Δ in asymptotis ΓΑΒ hyperbolam describere.

ἔστωσαν δύο εὐθεῖαι αἱ ΑΓ, ΑΒ τυχοῦσαν γωνίαν περιέχουσαι τὴν πρὸς τῷ Α, καὶ δεδόσθω σημεῖόν τι τὸ Δ, καὶ δέον ἔστω διὰ τοῦ Δ τὰς ΓΑΒ γράψαι εἰς ἀσυμπτώτους ὑπερβολήν.

ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, καὶ κείσθω τῇ ΔΑ ἴση ἡ ΑΕ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΖ, καὶ κείσθω τῇ ΑΖ ἴση ἡ ΖΓ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΓΔ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Β, καὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον γεγονέτω τὸ ὑπὸ ΔΕ, Η, καὶ ἐκβληθείσης τῆς ΑΔ γεγράφθω περὶ αὐτὴν διὰ τοῦ Δ ὑπερβολή, ὥστε τὰς καταγομένας δύνασθαι τὰ παρὰ τὴν Η ὑπερβάλλοντα εἴδει ὁμοίῳ τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖ τῇ ΒΑ, καὶ ἴση ἡ ΓΖ τῇ ΖΑ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓΔ τῇ ΔΒ· ὥστε τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΔ. καί ἐστι τὸ ἀπὸ τῆς ΓΒ ἴσον τῷ ὑπὸ ΔΕ, Η· ἑκάτερον ἄρα τῶν ἀπὸ ΓΔ, ΔΒ τέταρτον μέρος ἐστὶ τοῦ ὑπὸ ΔΕ, Η εἴδους. αἱ ἄρα ΑΒ, ΑΓ ἀσύμπτωτοί εἰσι τῆς γραφείσης ὑπερβολῆς.

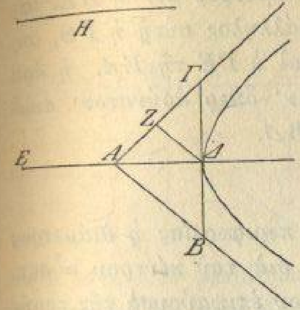
ε'.

Ἐὰν παραβολῆς ἢ ὑπερβολῆς ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα τέμνῃ δίχα, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ἔστω παραβολὴ ἢ ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, ἧς διάμετρος ἡ ΔΒΕ, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ ΖΒΗ, ἤχθω δέ τις εὐθεῖα ἐν τῇ τομῇ ἡ ΑΕΓ ἴσην ποιοῦσα τὴν ΑΕ τῇ ΕΓ. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ.

2. τῷ] p, τό V. 3. εἰς ἀσυμπτώτους τὰς ΓΑΒ γράψαι p, Halley. 8. ἐπειζευχθεῖσα V, corr. cv. τῷ] c, corr. ex τὸ m. 1 V. 18. σύμπτωτοι V, corr. p. 21. ἡ] ἢ V; corr. p.

ducatur $A\Delta$ et ad E producatur, ponaturque $AE = \Delta A$, et per Δ rectae AB parallela ducatur ΔZ, ponaturque $Z\Gamma = AZ$, et ducta $\Gamma\Delta$ ad B producatur, fiatque



$$\Delta E \times H = \Gamma B^2,$$

et producta $A\Delta$ circum eam per Δ hyperbola ita describatur, ut rectae ordinate ductae quadratae aequales sint spatiis rectae H adplicatis excedentibus figura rectangulo $\Delta E \times H$ simili [I, 53]. iam quoniam ΔZ rectae BA parallela est, et $\Gamma Z = ZA$, erit etiam $\Gamma\Delta = \Delta B$ [Eucl. VI, 2]. quare $\Gamma B^2 = 4\Gamma\Delta^2$. est autem $\Gamma B^2 = \Delta E \times H$. itaque

$$\Gamma\Delta^2 = \Delta B^2 = \tfrac{1}{4}\Delta E \times H.$$

ergo AB, $A\Gamma$ asymptotae sunt hyperbolae descriptae [prop. I].

V.

Si diametrus parabolae uel hyperbolae rectam aliquam in duas partes aequales secat, recta in termino diametri sectionem contingens rectae in duas partes aequales sectae parallela erit.

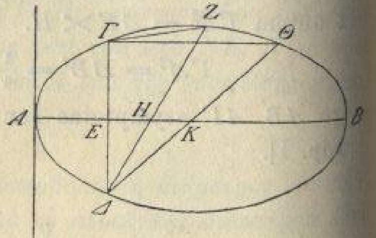
sit $AB\Gamma$ parabola uel hyperbola, cuius diametrus sit ΔBE, et ZBH sectionem contingat, ducatur autem in sectione recta aliqua $AE\Gamma$ efficiens $AE = E\Gamma$; dico, $A\Gamma$ et ZH parallelas esse.

εἰ γὰρ μή, ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ZH παράλληλος ἡ $\Gamma\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘA. ἐπεὶ οὖν παραβολὴ ἢ ὑπερβολή ἐστιν ἡ $AB\Gamma$, ἧς διάμετρος μὲν ἡ ΔE, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ZH, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἡ $\Gamma\Theta$, ἴση ἐστὶν ἡ ΓK τῇ $K\Theta$. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓE τῇ EA. ἡ ἄρα $A\Theta$ τῇ KE παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γὰρ ἐκβαλλομένη τῇ $B\Delta$.

ϛʹ.

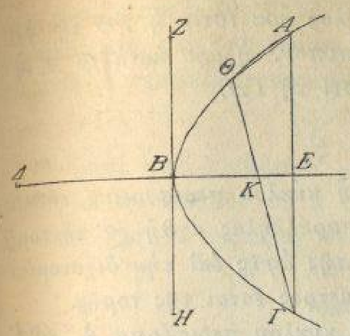
Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας ἡ διάμετρος εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν, ἡ κατὰ τὸ πέρας τῆς διαμέτρου ἐπιψαύουσα τῆς τομῆς παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἡ AB τὴν $\Gamma\Delta$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαν δίχα τεμνέτω κατὰ τὸ E. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$.



μὴ γάρ, ἀλλʼ εἰ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἡ ΔZ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔH τῇ ZH. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ $E\Gamma$· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ HE· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ τὸ H σημεῖον κέντρον ἐστὶ τῆς AB τομῆς, ἡ ΓZ συμπεσεῖται τῇ AB, εἴτε μή ἐστιν, ὑποκείσθω τὸ K, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΔK ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $\Gamma\Theta$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΔK τῇ $K\Theta$, ἔστι δὲ καὶ

3. $AB\Gamma$] c, A e corr. m. 1 V. 18. $\Gamma\Delta$] cvp, $\Gamma\Theta$ e corr. m. 2 V. 21. A] cvp, euan. V. 23. ΔH] ΔB e corr. V, corr. p.



nam si minus, per Γ rectae ZH parallela ducatur $\Gamma\Theta$, ducaturque ΘA. iam quoniam $AB\Gamma$ parabola uel hyperbola est, cuius diametrus est ΔE, contingens autem ZH, eique parallela $\Gamma\Theta$, erit $\Gamma K = K\Theta$ [I, 46–47]. uerum etiam $\Gamma E = EA$. itaque $A\Theta$, KE parallelae erunt [Eucl. VI, 2]; quod fieri non potest; nam $A\Theta$ producta cum $B\Delta$ concurrit [I, 22].

VI.

Si diametrus ellipsis uel circuli ambitus rectam aliquam non per centrum ductam in duas partes aequales secat, recta in termino diametri sectionem contingens rectae in duas partes aequales sectae parallela erit.

sit ellipsis uel circuli ambitus, cuius diametrus sit AB, et AB rectam $\Gamma\Delta$ non per centrum ductam in duas partes aequales secet in E. dico, rectam in A sectionem contingentem rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.

ne sit enim, sed, si fieri potest, sit ΔZ rectae in A contingenti parallela. itaque erit $\Delta H = ZH$ [I, 47]. uerum etiam $\Delta E = E\Gamma$. itaque ΓZ, HE parallelae sunt [Eucl. VI, 2]; quod absurdum est. nam siue H punctum centrum est sectionis AB, ΓZ cum AB concurret [I, 23], siue non est, supponatur K centrum, et ducta ΔK producatur ad Θ, ducaturque $\Gamma\Theta$. quoniam igitur $\Delta K = K\Theta$ et etiam $\Delta E = E\Gamma$, $\Gamma\Theta$ rectae ἡ $\varDelta E$ τῇ $E\Gamma$, παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ AB. ἀλλὰ καὶ ἡ ΓZ· ὅπερ ἄτοπον. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\varDelta$.

ζ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ τομῇ καὶ δίχα τμηθῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὴν διχοτομίαν ἐπιζευχθεῖσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $AB\Gamma$, ἐφαπτομένη δὲ αὐτῆς ἡ ZH, καὶ τῇ ZH παράλληλος ἡ $A\Gamma$ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ BE. λέγω, ὅτι ἡ BE διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

μὴ γάρ, ἀλλά, εἰ δυνατόν, ἔστω διάμετρος τῆς τομῆς ἡ $B\Theta$. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Gamma$· ὅπερ ἄτοπον· ἡ γὰρ AE τῇ $E\Gamma$ ἴση ἐστίν. οὐκ ἄρα ἡ $B\Theta$ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς BE.

η'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ εὐθεῖα συμπίπτῃ κατὰ δύο σημεῖα, ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῆς τομῆς πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ $AB\Gamma$, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $E\varDelta$, $\varDelta Z$, καὶ τῇ $AB\Gamma$ συμπιπτέτω τις ἡ $A\Gamma$. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις.

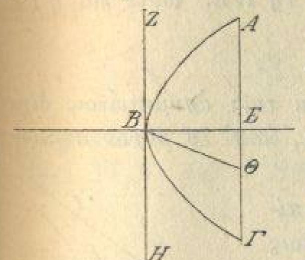
τετμήσθω ἡ $A\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω

1. $\Gamma\Theta$] cvp, euan. V. 8. διάμετρον V; corr. p. 13. δυνατόν] cv, -όν euan. V. 21. αἱ] om. V, corr. p.

AB parallela est [Eucl. VI, 2]. uerum etiam ΓZ ei parallela est; quod absurdum est [Eucl. I, 30]. ergo recta in A contingens rectae $\Gamma\varDelta$ parallela est.

VII.

Si recta coni sectionem uel circuli ambitum contingit, et in sectione recta huic parallela ducitur et in duas partes aequales secatur, recta a puncto contactus ad medium punctum ducta diametrus sectionis erit.



sit coni sectio uel circuli ambitus $AB\Gamma$, contingens autem ZH, et rectae ZH parallela $A\Gamma$, quae in E in duas partes aequales secetur, ducaturque BE. dico, BE diametrum sectionis esse.

ne sit enim, sed, si fieri potest, diametrus sectionis sit $B\Theta$. itaque $A\Theta = \Theta\Gamma$ [I deff. pr. 4]; quod absurdum est; nam $AE = E\Gamma$. ergo $B\Theta$ diametrus sectionis non erit. iam eodem modo demonstrabimus, ne aliam quidem ullam diametrum esse praeter BE.

VIII.

Si recta cum hyperbola in duobus punctis concurrit, in utramque partem producta cum asymptotis concurret, et rectae ex ea ad asymptotas a sectione abscisae aequales erunt.

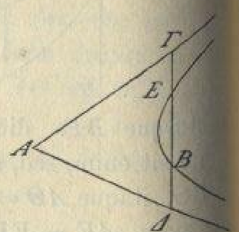
sit hyperbola $AB\Gamma$, asymptotae autem $E\varDelta$, $\varDelta Z$, et cum $AB\Gamma$ concurrat recta aliqua $A\Gamma$. dico, eam in utramque partem productam cum asymptotis concurrere.

ἡ ΔH. διάμετρος ἄρα ἐστὶ τῆς τομῆς· ἡ ἄρα κατὰ τὸ B ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $A\Gamma$. ἔστω οὖν ἐφαπτομένη ἡ ΘBK· συμπεσεῖται δὴ ταῖς $E\Delta$, ΔZ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ $A\Gamma$ τῇ $K\Theta$, καὶ ἡ $K\Theta$ συμπίπτει ταῖς ΔK, $\Delta\Theta$, καὶ ἡ $A\Gamma$ ἄρα συμπεσεῖται ταῖς ΔE, ΔZ.

συμπιπτέτω κατὰ τὰ E, Z· καί ἐστιν ἴση ἡ ΘB τῇ BK· ἴση ἄρα καὶ ἡ ZH τῇ HE. ὥστε καὶ ἡ ΓZ τῇ AE.

θ'.

Ἐὰν εὐθεῖα συμπίπτουσα ταῖς ἀσυμπτώτοις δίχα τέμνηται ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς, καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.



εὐθεῖα γὰρ ἡ $\Gamma\Delta$ συμπίπτουσα ταῖς $\Gamma A\Delta$ ἀσυμπτώτοις δίχα τεμνέσθω ὑπὸ τῆς ὑπερβολῆς κατὰ τὸ E σημεῖον. λέγω, ὅτι κατ' ἄλλο σημεῖον οὐχ ἅπτεται τῆς τομῆς.

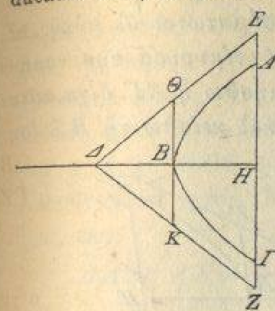
εἰ γὰρ δυνατόν, ἁπτέσθω κατὰ τὸ B. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΓE τῇ $B\Delta$· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓE τῇ $E\Delta$ ἴση. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον ἅπτεται τῆς τομῆς.

ι'.

Ἐὰν εὐθεῖά τις τέμνουσα τὴν τομὴν συμπίπτῃ ἑκατέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ γινο-

1. ἡ] (alt.) c, renouat. m. rec. V. 5. $\Delta\Theta$] $K\Theta$ V, corr. p. 15. $\Gamma A\Delta$] c, Δ e corr. m. 1 V.

$A\Gamma$ in H in duas partes aequales secetur, et ducatur ΔH; ea igitur diametrus sectionis est [prop. VII]. itaque recta in B contingens rectae $A\Gamma$ parallela est [prop. V—VI]. contingat igitur ΘBK. itaque cum $E\Delta, \Delta Z$ concurret [prop. III]. quoniam igitur $A\Gamma$ et $K\Theta$ parallelae sunt, et $K\Theta$ cum $\Delta K, \Delta\Theta$ concurrit, etiam $A\Gamma$ cum $\Delta E, \Delta Z$ concurret.



concurrat in E, Z. et $\Theta B = BK$; quare etiam [Eucl. VI, 4] $ZH = HE$. ergo etiam $\Gamma Z = AE$.

IX.

Si recta cum asymptotis concurrens ab hyperbola in duas partes aequales secatur, in uno puncto solo sectionem tangit.

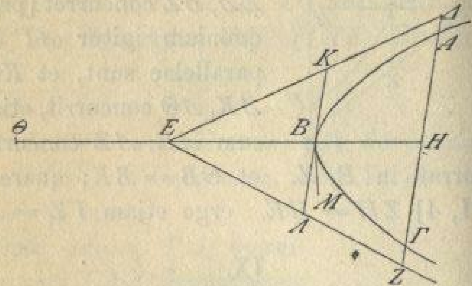
recta enim $\Gamma\Delta$ cum asymptotis $\Gamma A\Delta$ concurrens ab hyperbola in puncto E in duas partes aequales secetur. dico, eam in nullo alio puncto sectionem tangere.

nam si fieri potest, tangat in B. itaque $\Gamma E = B\Delta$ [prop. VIII]; quod absurdum est; supposuimus enim, esse $\Gamma E = E\Delta$. ergo $\Gamma\Delta$ in nullo alio puncto sectionem tangit.

X.

Si recta aliqua sectionem secans cum utraque asymptota concurrit, rectangulum comprehensum rectis inter asymptotas sectionemque abscisis aequale est quartae parti figurae ad diametrum effectae, quae μένου εἴδους πρὸς τῇ διχοτομούσῃ διαμέτρῳ τὰς ἀγομένας παρὰ τὴν ἠγμένην εὐθεῖαν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ $AB\Gamma$, ἀσύμπτωτοι δὲ αὐτῆς αἱ ΔE, EZ, καὶ ἤχθω τις ἡ ΔZ τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους, καὶ τετμήσθω ἡ $A\Gamma$ δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ HE, καὶ κείσθω τῇ BE ἴση



ἡ $E\Theta$, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ B τῇ ΘEB πρὸς ὀρθὰς ἡ BM· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ $B\Theta$, ὀρθία δὲ ἡ BM. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΔAZ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ ὑπὸ τῶν ΘBM, ὁμοίως δὴ καὶ τὸ ὑπὸ τῶν $\Delta\Gamma Z$.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ $K\Lambda$· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΔZ. καὶ ἐπεὶ δέδεικται, ὡς ἡ ΘB πρὸς BM, τὸ ἀπὸ EB πρὸς τὸ ἀπὸ BK, τουτέστι τὸ ἀπὸ EH πρὸς τὸ ἀπὸ $H\Delta$, ὡς δὲ ἡ ΘB πρὸς BM, τὸ ὑπὸ ΘHB πρὸς τὸ ἀπὸ HA, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ EH πρὸς τὸ ἀπὸ $H\Delta$, τὸ ὑπὸ ΘHB πρὸς τὸ ἀπὸ HA. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ EH πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΔH, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΘHB πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ AH, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ἀπὸ EB πρὸς

1. εἴδους] cvp, euan. V. 15. ὡς ἄρα — 16. ἀπὸ HA] addidi e p (τῆς EH; τῆς $H\Delta$ οὕτω; τῶν ΘH, HB; τῆς HA); om. V; cfr. p. 196, 10—11.

rectas ductae rectae parallelas in binas partes aequales secat.

sit hyperbola $AB\Gamma$, asymptotae autem eius ΔE, EZ, et ducatur recta aliqua ΔZ sectionem asymptotasque secans, et $A\Gamma$ in H in duas partes aequales secetur, ducaturque HE, et ponatur $E\Theta = BE$, ducaturque a B ad ΘEB perpendicularis BM; itaque $B\Theta$ diametrus est [prop. VII], BM autem latus rectum.[1]) dico, esse

$$\Delta A \times AZ = \tfrac{1}{4}\Theta B \times BM = \Delta\Gamma \times \Gamma Z.$$

ducatur enim per B sectionem contingens $K\Lambda$; ea igitur rectae ΔZ parallela est [prop. V]. et quoniam demonstrauimus, esse

$$\Theta B : BM = EB^2 : BK^2 \text{ [prop. I]} = EH^2 : H\Delta^2$$

[Eucl. VI, 4], et

$$\Theta B : BM = \Theta H \times HB : HA^2 \text{ [I, 21]},$$

erit etiam

$$EH^2 : H\Delta^2 = \Theta H \times HB : HA^2.$$

iam quoniam est, ut totum EH^2 ad totum ΔH^2, ita ablatum $\Theta H \times HB$ ad ablatum AH^2, erit etiam [Eucl. V, 19] reliquum EB^2 [Eucl. II, 6] ad reliquum $\Delta A \times AZ$ [Eucl. II, 5] $= EH^2 : H\Delta^2 = EB^2 : BK^2$ [Eucl. VI, 4]. itaque [Eucl. V, 9]

$$ZA \times A\Delta = BK^2$$

[tum u. prop. III].

1) Intellegitur igitur factum esse, ut sit

$$\Theta B : BM = \Theta H \times HB : AH^2,$$

nec opus est hoc cum Memo diserte adiicere, ut fecit Halley.

λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΔΑΖ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΚ. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ἀπὸ ΒΚ.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ τὸ ὑπὸ ΔΓΖ τῷ ἀπὸ ΒΑ. ἴσον δὲ τὸ ἀπὸ ΚΒ τῷ ἀπὸ ΒΑ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΖΑΔ τῷ ὑπὸ ΖΓΔ.

ια'.

Ἐὰν ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν τέμνῃ τις εὐθεῖα, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν καὶ τῆς τομῆς ἴσον ἔσται τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διαμέτρου παρὰ τὴν τέμνουσαν εὐθεῖαν.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΔ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΔΑ ἐπὶ τὸ Ε, καὶ διά τινος σημείου τοῦ Ε διήχθω ἡ ΕΖ τέμνουσα τὰς ΕΑ, ΑΓ.

ὅτι μὲν οὖν συμπίπτει τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον, φανερόν· ἡ γὰρ διὰ τοῦ Α τῇ ΕΖ παράλληλος ἀγομένη ὡς ἡ ΑΒ τεμεῖ τὴν ὑπὸ ΓΑΔ γωνίαν καὶ συμπεσεῖται τῇ τομῇ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἔσται· ἡ ΕΖ ἄρα συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ Η.

λέγω δή, ὅτι καὶ τὸ ὑπὸ τῶν ΕΗΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ΑΒ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Η τεταγμένως ἡ ΘΗΛΚ· ἡ ἄρα διὰ τοῦ Β ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΗΘ. ἔστω

4. τῷ] cvp, corr. ex τό m. 1 V. 5. ΒΑ ἴσον? 16. ΑΔ] cvp, corr. ex ΓΔ m. 1 V. 24. δή] δέ V; corr. Halley.

iam similiter demonstrabimus, esse etiam

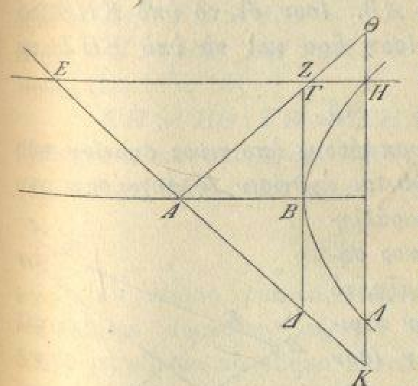
$$\Delta\Gamma \times \Gamma Z = BA^2.$$

uerum $KB^2 = BA^2$ [prop. III]. ergo etiam

$$ZA \times A\Delta = Z\Gamma \times \Gamma\Delta.$$

XI.

Si recta aliqua utramque rectam, quae angulum ad angulum hyperbolam continentem deinceps positum comprehendunt, secat, cum sectione in uno solo puncto concurret, et rectangulum comprehensum rectis inter rectas comprehendentes sectionemque abscisis aequale erit quartae parti quadrati diametri rectae secanti parallelae ductae.



sit hyperbola, cuius asymptotae sint ΓA, $A\Delta$, producaturque ΔA ad E, et per punctum aliquod E ducatur EZ rectas EA, $A\Gamma$ secans.

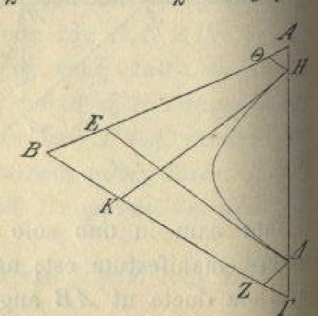
iam eam in uno solo puncto cum sectione concurrere, manifestum est; nam recta per A rectae EZ parallela ducta ut AB angulum $\Gamma A\Delta$ secabit et cum sectione concurret [prop. II] diametrusque eius erit [I, 51 coroll.]; itaque EZ in uno solo puncto cum sectione concurret [I, 26].

In figura Λ in v om., in V posita est m. 2 in intersectione rectarum AB, ΘK.

ἡ ΓΔ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓΒ τῇ ΒΔ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΒ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΓΒΔ, πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τῆς ΓΒ πρὸς ΒΑ καὶ τοῦ τῆς ΔΒ πρὸς ΒΑ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΓΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΘΗ πρὸς ΗΖ, ὡς δὲ ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἡ ΗΚ πρὸς ΗΕ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς ΘΗ πρὸς ΗΖ καὶ τῆς ΚΗ πρὸς ΗΕ. ἀλλὰ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ λόγος σύγκειται ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΕΗΖ, τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΑ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ ΚΗΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, τὸ ὑπὸ ΕΗΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΒ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΚΗΘ τῷ ἀπὸ ΓΒ ἐδείχθη· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ ΕΗΖ τῷ ἀπὸ ΑΒ.

ιβ'.

Ἐὰν ἐπὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς β̄ εὐθεῖαι ἀχθῶσιν ἐν τυχούσαις γωνίαις, καὶ ταύταις παράλληλοι ἀχθῶσιν ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς, τὸ ὑπὸ τῶν παραλλήλων περιεχόμενον ὀρθογώνιον ἴσον ἔσται τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν, αἷς αἱ παράλληλοι ἤχθησαν.



ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς το Δ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὰς ΑΒ, ΒΓ κατήχθωσαν αἱ ΔΕ, ΔΖ, εἰλήφθω

10. ΕΗΖ] corr. ex ΕΖΗ m. 2 V, ΕΖΗ cv; τῶν ΕΗ, ΗΖ p. 17. ἀχθῶσι V, corr. pc.

concurrat in H.

iam dico, esse etiam $EH \times HZ = AB^2$.

per H enim ordinate ducatur $\Theta H \Delta K$; itaque recta in B contingens rectae $H\Theta$ parallela est [prop. V]. sit $\Gamma\Delta$. iam quoniam $\Gamma B = B\Delta$ [prop. III], erit

$$\Gamma B^2 : BA^2 = \Gamma B \times B\Delta : BA^2$$
$$= (\Gamma B : BA) \times (\Delta B : BA).$$

est autem [Eucl. VI, 4] $\Gamma B : BA = \Theta H : HZ$,

$$\Delta B : BA = HK : HE.$$

itaque erit $\Gamma B^2 : BA^2 = (\Theta H : HZ) \times (KH : HE)$. est autem etiam

$$KH \times H\Theta : EH \times HZ = (\Theta H : HZ) \times (KH : HE).$$

quare $KH \times H\Theta : EH \times HZ = \Gamma B^2 : BA^2$. permutando [Eucl. V, 16]

$$KH \times H\Theta : \Gamma B^2 = EH \times HZ : AB^2.$$

demonstrauimus autem, esse $KH \times H\Theta = \Gamma B^2$ [prop. X]. ergo etiam $EH \times HZ = AB^2$ [Eucl. V, 14].

XII.

Si ab aliquo puncto sectionis duae rectae ad asymptotas ducuntur angulos quoslibet efficientes, iisque parallelae ab aliquo puncto sectionis ducuntur, rectangulum rectis parallelis comprehensum aequale erit rectangulo comprehenso rectis, quibus parallelae ductae sunt.

sit hyperbola, cuius asymptotae sint AB, $B\Gamma$, et in sectione sumatur punctum aliquod Δ, ab eoque ad AB, $B\Gamma$ ducantur ΔE, ΔZ, et in sectione aliud sumatur punctum H, et per H rectis $E\Delta$, ΔZ parallelae ducantur $H\Theta$, HK. dico, esse

$$E\Delta \times \Delta Z = \Theta H \times HK.$$

δέ τι σημεῖον ἕτερον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η ταῖς ΕΔ, ΔΖ παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ ΗΘ, ΗΚ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔΗ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Γ. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΑΔΓ τῷ ὑπὸ ΑΗΓ, ἔστιν ἄρα ὡς ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΑΗ πρὸς ΑΔ, ἡ ΗΘ πρὸς ΕΔ, ὡς δὲ ἡ ΔΓ πρὸς ΓΗ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ· ὡς ἄρα ἡ ΘΗ πρὸς ΔΕ, ἡ ΔΖ πρὸς ΗΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΕΔΖ τῷ ὑπὸ ΘΗΚ.

ιγ'.

Ἐὰν ἐν τῷ ἀφοριζομένῳ τόπῳ ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων καὶ τῆς τομῆς παράλληλος ἀχθῇ τις εὐθεῖα τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων, συμπεσεῖται τῇ τομῇ καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΓΑ, ΑΒ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Ε, καὶ δι' αὐτοῦ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

εἰ γὰρ δυνατόν, μὴ συμπιπτέτω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὰς ΓΑ, ΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΗΓ, ΗΘ, καὶ τὸ ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἔστω τῷ ὑπὸ ΑΕΖ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΖ καὶ ἐκβεβλήσθω· συμπεσεῖται δὴ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Κ παρὰ τὰς ΓΑΒ ἤχθωσαν αἱ ΚΛ, ΚΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΓΗΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΚΔ. ὑπόκειται δὲ καὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ ἴσον· τὸ ἄρα ὑπὸ ΔΚΛ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΛΑ, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΕΖ· ὅπερ

5. Post pr. ὑπό rep. ΕΔΖ lin. 3 — ὑπό lin. 5 (pr.) Vv; corr. V m. 2, pc. 7. ΕΔ] τὸ ΕΔ V; corr. p. 16. ΓΑ] ΓΔ V et ut uidetur e corr. m. 1 V; corr. pc. 24. παρά] c, π corr. ex κ m. 1 V.

ducatur enim ΔH et producatur ad A, Γ. iam quoniam est $A\Delta \times \Delta\Gamma = AH \times H\Gamma$ [prop. X], erit [Eucl. VI, 16] $AH : A\Delta = \Delta\Gamma : \Gamma H$. est autem [Eucl. VI, 4] $AH : A\Delta = H\Theta : E\Delta$,

$$\Delta\Gamma : \Gamma H = \Delta Z : HK.$$

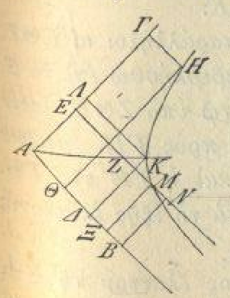
itaque $\Theta H : \Delta E = \Delta Z : HK$. ergo erit [Eucl. VI, 16] $E\Delta \times \Delta Z = \Theta H \times HK$.

XIII.

Si in loco asymptotis sectioneque comprehenso recta aliqua alteri asymptotae parallela ducitur, cum sectione in uno puncto solo concurret.

sit hyperbola, cuius asymptotae sint ΓA, AB, et sumatur punctum aliquod E, et per E rectae AB parallela ducatur EZ. dico, eam cum sectione concurrere.

nam, si fieri potest, ne concurrat, et in sectione sumatur punctum aliquod H, et per H rectis ΓA, AB parallelae ducantur $H\Gamma$, $H\Theta$, fiatque $\Gamma H \times H\Theta = AE \times EZ$, et ducatur AZ producaturque; concurret igitur cum sectione [prop. II]. concurrat in K, et rectis ΓA, AB parallelae per K ducantur $K\Lambda$, $K\Delta$; itaque $\Gamma H \times H\Theta = \Lambda K \times K\Delta$ [prop. XII]. supposuimus autem, esse etiam $\Gamma H \times H\Theta = AE \times EZ$.



itaque erit $\Delta K \times K\Lambda = AE \times EZ = K\Lambda \times \Lambda A$ [Eucl. I, 34]; quod fieri non potest; est enim et

Figura in Vv imperfecta est.

ἀδύνατον· μείζων γάρ ἐστι καὶ ἡ $K\Lambda$ τῆς EZ καὶ ἡ ΛA τῆς AE. συμπεσεῖται ἄρα ἡ EZ τῇ τομῇ.

συμπιπτέτω κατὰ τὸ M.

λέγω δή, ὅτι κατ' ἄλλο οὐ συμπεσεῖται. εἰ γὰρ δυνατόν, συμπιπτέτω καὶ κατὰ τὸ N, καὶ διὰ τῶν M, N τῇ ΓA παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $M\Xi$, NB. τὸ ἄρα ὑπὸ $EM\Xi$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ENB· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα καθ' ἕτερον σημεῖον συμπεσεῖται τῇ τομῇ.

ιδ'.

Αἱ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ τομὴ εἰς ἄπειρον ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ παντὸς τοῦ δοθέντος διαστήματος εἰς ἔλαττον ἀφικνοῦνται διάστημα.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ AB, $A\Gamma$, δοθὲν δὲ διάστημα τὸ K. λέγω, ὅτι αἱ AB, $A\Gamma$ καὶ ἡ τομὴ ἐκβαλλόμεναι ἔγγιόν τε προσάγουσιν ἑαυταῖς καὶ εἰς ἔλασσον ἀφίξονται διάστημα τοῦ K.

ἤχθωσαν γὰρ τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλοι αἱ $E\Theta Z$, $\Gamma H\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Theta$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ $\Gamma H\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $Z\Theta E$, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΔH πρὸς $Z\Theta$, ἡ ΘE πρὸς ΓH. μείζων δὲ ἡ ΔH τῆς $Z\Theta$· μείζων ἄρα καὶ ἡ $E\Theta$ τῆς ΓH. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ αἱ κατὰ τὸ ἑξῆς ἐλάττονές εἰσιν.

εἰλήφθω δη τοῦ K διαστήματος ἔλαττον τὸ $E\Lambda$, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ $A\Gamma$ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛN· συμ-

4. ὅτι] addidi; om. V. 5. καί] (pr.) om. cp. 7. $EM\Xi$] c, Ξ corr. ex Z m. 1 V. 19. $A\Theta$] p, A incertum V, $E\Theta$ c. 28. ἔλαττον V; corr. p.

$K\Lambda > EZ$ et $\Lambda A > AE$. ergo EZ cum sectione concurret.

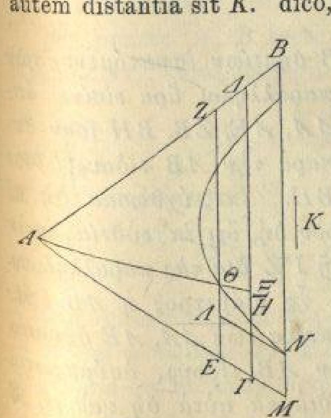
concurrat in M.

iam dico, eam in nullo alio puncto concurrere. nam si fieri potest, concurrat etiam in N, et per M, N rectae ΓA parallelae ducantur $M\Xi$, NB. itaque $EM \times M\Xi = EN \times NB$ [prop. XII]; quod fieri non potest. ergo in nullo alio puncto cum sectione concurret.

XIV.

Asymptotae et sectio in infinitum productae semper magis inter se adpropinquant et ad distantiam omni data distantia minorem perueniunt.

sit hyperbola, cuius asymptotae sint AB, $A\Gamma$, data autem distantia sit K. dico, rectas AB, $A\Gamma$ sectionemque productas semper magis inter se adpropinquare et ad distantiam minorem quam K peruenturas esse.



ducantur enim contingenti parallelae $E\Theta Z$, $\Gamma H\Delta$, ducaturque $A\Theta$ et producatur ad Ξ. iam quoniam est [prop. X] $\Gamma H \times H\Delta = Z\Theta \times \Theta E$, erit [Eucl. VI, 16]

$$\Delta H : Z\Theta = \Theta E : \Gamma H.$$

uerum $\Delta H > Z\Theta$; itaque etiam [Eucl. V, 14] $E\Theta > \Gamma H$. iam similiter demonstrabimus, etiam distantias sequentes minores esse.

iam sumatur $E\Lambda < K$, et per Λ rectae $A\Gamma$ parallela πεσεῖται ἄρα τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ N, καὶ διὰ τοῦ N τῇ EZ παράλληλος ἤχθω ἡ MNB. ἡ ἄρα MN ἴση ἐστὶ τῇ $E\Delta$ καὶ διὰ τοῦτο ἐλάττων τῆς K.

πόρισμα.

ἐκ δὴ τούτου φανερόν, ὅτι πασῶν τῶν ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ ἐγγιόν εἰσιν αἱ AB, $A\Gamma$, καὶ ἡ ὑπὸ τῶν $BA\Gamma$ περιεχομένη γωνία ἐλάσσων ἐστὶ δηλαδὴ τῆς ὑπὸ ἑτέρων ἀσυμπτώτων τῇ τομῇ περιεχομένης.

ιε΄.

Τῶν ἀντικειμένων τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν διάμετρος ἡ AB, κέντρον δὲ τὸ Γ. λέγω, ὅτι τῶν A, B τομῶν κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

ἤχθωσαν διὰ τῶν A, B σημείων ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν αἱ ΔAE, ZBH· παράλληλοι ἄρα εἰσίν. ἀπειλήφθω δὴ ἑκάστη τῶν ΔA, AE, ZB, BH ἴσον δυναμένη τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν AB εἴδους· ἴσαι ἄρα αἱ ΔA, AE, ZB, BH. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ $\Gamma\Delta$, ΓE, ΓZ, ΓH. φανερὸν δή, ὅτι ἐπ᾽ εὐθείας ἐστὶν ἡ $\Delta\Gamma$ τῇ ΓH καὶ ἡ ΓE τῇ ΓZ διὰ τὰς παραλλήλους. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν, ἧς διάμετρος ἡ AB, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΔE, καὶ ἑκατέρα τῶν ΔA, AE δύναται τὸ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν AB εἴδους, ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶν αἱ $\Delta\Gamma$, ΓE. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τῇ B ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ $Z\Gamma$, ΓH. τῶν ἀντικειμένων ἄρα κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

2. MNB] NMB V; corr. p. 4. πόρισμα] om. V. 5. ἀσυμπτώτων] c, ἀ- supra scr. m. 1 V. 21. ΓZ] EZ V, corr. p.

ducatur AN; concurret igitur cum sectione [prop. XIII]. concurrat in N, et per N rectae EZ parallela ducatur MNB. ergo erit [Eucl. I, 34] $MN = E\Delta < K$.

Corollarium.

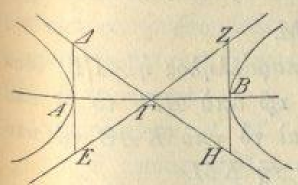
Iam hinc manifestum est, omnibus rectis cum sectione non concurrentibus propiores esse AB, $A\Gamma$, et proinde angulum $BA\Gamma$ minorem esse quouis angulo ab aliis rectis cum sectione non concurrentibus comprehenso.

XV.

Sectionum oppositarum communes sunt asymptotae.

sint sectiones oppositae, quarum diametrus sit AB, centrum autem Γ. dico, sectionum A, B communes esse asymptotas.

per puncta A, B sectiones contingentes ducantur ΔAE, ZBH; parallelae igitur sunt [prop. V]. ponantur igitur ΔA, AE, ZB, BH singulae quartae parti figurae rectae AB adplicatae aequales quadratae; est igitur $\Delta A = AE = ZB = BH$. iam ducantur $\Gamma\Delta$, ΓE, ΓZ, ΓH. manifestum igitur est propter parallelas [Eucl. I, 33], in eadem recta esse $\Delta\Gamma$, ΓH et ΓE, ΓZ. iam quoniam hyperbola est, cuius diametrus est AB, contingens autem ΔE, et utraque ΔA, AE quartae parti figurae rectae AB adplicatae quadrata aequalis est, asymptotae sunt $\Delta\Gamma$, ΓE [prop. I]. eadem igitur de causa sectionis B asymptotae sunt $Z\Gamma$, ΓH. ergo oppositarum communes sunt asymptotae.



ις'.

Ἐὰν ἐν ἀντικειμέναις ἀχθῇ τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τῶν περιεχουσῶν τὰς τομάς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων καθ' ἓν μόνον σημεῖον, καὶ αἱ ἀπολαμβανόμεναι ἀπ' αὐτῆς ὑπὸ τῶν τομῶν πρὸς ταῖς ἀσυμπτώτοις ἴσαι ἔσονται.

ἔστωσαν γὰρ ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον μὲν τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΓΗ, ΕΓΖ, καὶ διήχθω τις εὐθεῖα τέμνουσα ἑκατέραν τῶν ΔΓ, ΓΖ ἡ ΘΚ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν καθ' ἓν σημεῖον μόνον.

ἐπεὶ γὰρ τῆς Α τομῆς ἀσύμπτωτοί εἰσιν αἱ ΔΓ, ΓΕ, καὶ διῆκταί τις εὐθεῖα ἡ ΘΚ τέμνουσα ἑκατέραν τῶν περιεχουσῶν τὴν ἐφεξῆς γωνίαν τὴν ὑπὸ ΔΓΖ, ἡ ΚΘ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ τομῇ. ὁμοίως δὴ καὶ τῇ Β.

συμπιπτέτω κατὰ τὰ Λ, Μ.

ἤχθω διὰ τοῦ Γ τῇ ΛΜ παράλληλος ἡ ΑΓΒ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ μὲν ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ἀπὸ ΑΓ, τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΚ τῷ ἀπὸ ΓΒ. ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΚΛΘ τῷ ὑπὸ ΘΜΚ ἐστιν ἴσον, καὶ ἡ ΛΘ τῇ ΚΜ.

ιζ'.

Τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

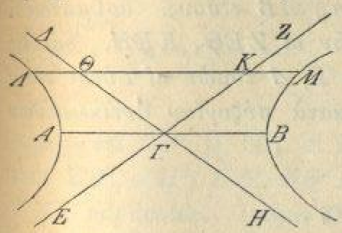
ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ὧν αἱ διάμετροι συζυγεῖς αἱ ΑΒ, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε. λέγω, ὅτι κοιναὶ αὐτῶν εἰσιν αἱ ἀσύμπτωτοι.

9. ΔΓΗ, ΕΓΖ] ΔΓ ἢ ΕΖ V; corr. p. 10. ΓΖ] c, corr. ex ΔΖ m. 1 V. 18. τά] τό V; corr. p.

XVI.

Si in oppositis recta ducitur utramque rectam secans, quae angulum angulis sectiones continentibus deinceps positum comprehendunt, cum utraque opposita in uno solo puncto concurret, et rectae ex ea a sectionibus ad asymptotas abscisae aequales erunt.

sint enim oppositae *A*, *B*, quarum centrum sit *Γ*, asymptotae autem *ΔΓΗ*, *ΕΓΖ* [prop. XV], ducaturque recta aliqua *ΘΚ* utramque *ΔΓ*, *ΓΖ* secans. dico, eam productam cum utraque sectione in uno solo puncto concurrere.



nam quoniam sectionis *A* asymptotae sunt *ΔΓ*, *ΓΕ*, et ducta est recta aliqua *ΘΚ* utramque rectarum angulum *ΔΓΖ* deinceps positum comprehendentium secans, *ΚΘ* producta cum sectione concurret [prop. XI]. similiter igitur etiam cum *B* concurret.

concurrat in *Λ*, *M*.

per *Γ* rectae *ΛΜ* parallela ducatur *AΓΒ*; itaque [prop. XI] $K\Lambda \times \Lambda\Theta = A\Gamma^2$, $\Theta M \times MK = \Gamma B^2$. quare etiam $K\Lambda \times \Lambda\Theta = \Theta M \times MK$ et $\Lambda\Theta = KM$.

XVII.

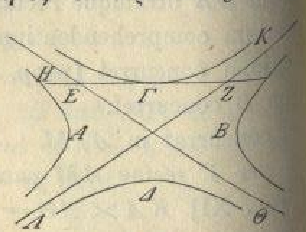
Oppositarum coniugatarum communes sunt asymptotae.

sint oppositae coniugatae, quarum diametri coniugatae sint *AB*, *ΓΔ*, centrum autem *E*. dico, earum asymptotas communes esse.

ἤχθωσαν γὰρ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν διὰ τῶν A, B, Γ, Δ σημείων αἱ ZAH, $H\Delta\Theta$, ΘBK, $K\Gamma Z$· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $ZH\Theta K$. ἐπεζεύχθωσαν οὖν αἱ $ZE\Theta$; KEH· εὐθεῖαι ἄρα εἰσὶ καὶ διάμετροι τοῦ παραλληλογράμμου, καὶ δίχα τέμνονται πᾶσαι κατὰ τὸ E σημεῖον. καὶ ἐπεὶ τὸ πρὸς τῇ AB εἶδος ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς $\Gamma\Delta$ τετραγώνῳ, ἴση δὲ ἡ ΓE τῇ $E\Delta$, ἕκαστον ἄρα τῶν ἀπὸ ZA, AH, KB, $B\Theta$ τέταρτόν ἐστι τοῦ πρὸς τῇ AB εἴδους. ἀσύμπτωτοι ἄρα εἰσὶ τῶν A, B τομῶν αἱ $ZE\Theta$, KEH. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῶν Γ, Δ τομῶν αἱ αὐταί εἰσιν ἀσύμπτωτοι. τῶν ἄρα κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων κοιναί εἰσιν ἀσύμπτωτοι.

ιη'.

Ἐὰν μιᾷ τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων συμπίπτουσα εὐθεῖα ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

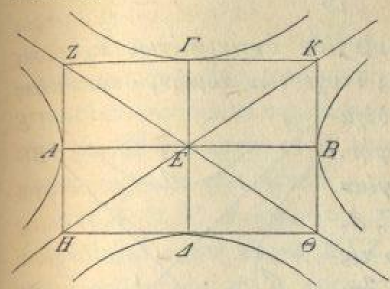


ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, Γ, Δ, καὶ τῇ Γ τις εὐθεῖα συμπιπτέτω ἡ EZ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν A, B τομῶν καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ἔστωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ $H\Theta$, $K\Lambda$.

8. ἀπό] ὑπό V; corr. Memus. 15. Ἐάν] ἐν V; corr. Paris. gr. 2356; ἐὰν ἐν cp. 16. πίπτῃ] c, corr. ex πίπτη m. 1 V.

nam sectionem contingentes per puncta A, B, Γ, Δ ducantur ZAH, $H\Delta\Theta$, ΘBK, $K\Gamma Z$; parallelogrammum igitur est $ZH\Theta K$ [prop. V]. ducantur igitur $ZE\Theta$, KEH; rectae igitur sunt diametrique parallelogrammi, et in puncto E omnes in binas partes aequales secantur [cfr. prop. XV]. et quoniam figura rectae AB adplicata aequalis est $\Gamma\Delta^2$ [I, 56], et $\Gamma E = E\Delta$, singula quadrata ZA^2, AH^2, KB^2, $B\Theta^2$ quarta pars sunt figurae ad AB adplicatae. itaque $ZE\Theta$, KEH asymptotae sunt sectionum A, B [prop. I]. iam similiter demonstrabimus, easdem etiam sectionum Γ, Δ asymptotas esse. ergo oppositarum coniugatarum communes sunt asymptotae.



XVIII.

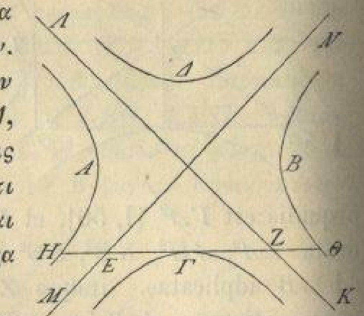
Si recta cum una oppositarum coniugatarum concurrens in utramque partem producta extra sectionem cadit, cum utraque deinceps positarum sectionum in uno solo puncto concurret.

sint sectiones oppositae coniugatae A, B, Γ, Δ, et cum Γ recta aliqua EZ concurrat productaque in utramque partem extra sectionem cadat. dico, eam cum utraque sectione A, B in uno solo puncto concurrere.

sint enim $H\Theta$, $K\Lambda$ asymptotae sectionum. itaque ἡ ΕΖ ἄρα συμπίπτει ἑκατέρᾳ τῶν ΗΘ, ΚΛ. φανερὸν οὖν, ὡς καὶ ταῖς Α, Β τομαῖς συμπεσεῖται καθ' ἓν μόνον σημεῖον.

ιθ'.

Ἐὰν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα ἐπιψαύουσα, ἧς ἔτυχε τῶν τομῶν, συμπεσεῖται ταῖς ἐφεξῆς τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὴν ἁφήν.



ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τῆς Γ ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ ΕΓΖ. λέγω, ὅτι ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ Γ.

ὅτι μὲν οὖν συμπεσεῖται ταῖς Α, Β τομαῖς, φανερόν· συμπιπτέτω κατὰ τὰ Η, Θ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ.

ἤχθωσαν γὰρ αἱ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΚΛ, ΜΝ. ἴση ἄρα ἡ ΕΗ τῇ ΖΘ καὶ ἡ ΓΕ τῇ ΓΖ, καὶ ὅλη ἡ ΓΗ τῇ ΓΘ ἐστιν ἴση.

κ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα ἐφάπτηται, καὶ διὰ τοῦ κέντρου αὐτῶν ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ὧν ἡ μὲν διὰ τῆς ἁφῆς, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἕως οὗ συμπέσῃ μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν, ἡ κατὰ τὴν σύμπτωσιν ἐφαπτομένη τῆς τομῆς εὐθεῖα παράλληλος ἔσται τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ τοῦ κέντρου

12. ΕΓΖ] scripsi; ΓΕΖ Vp. 25. ἡ] (alt.) c, ἡ ἡ V, ἢ ἡ p. 27. κατά] κατὰ τά V; corr. pc.

ΕΖ cum utraque ΗΘ, ΚΛ concurrit [prop. III]. manifestum igitur, eam etiam cum sectionibus Α, Β in uno solo puncto concurrere [prop. XVI].

XIX.

Si in oppositis coniugatis recta aliqua ducitur quamlibet sectionum contingens, cum sectionibus deinceps positis concurret et in puncto contactus in duas partes aequales secabitur.

sint Α, Β, Γ, Δ oppositae coniugatae, et sectionem Γ contingat recta aliqua ΕΓΖ. dico, eam productam cum sectionibus Α, Β concurrere et in Γ in duas partes aequales secari.

iam eam cum sectionibus Α, Β concurrere, manifestum est [prop. XVIII]. concurrat in Η, Θ.

dico, esse ΓΗ = ΓΘ.

ducantur enim asymptotae sectionum ΚΛ, ΜΝ. itaque ΕΗ = ΖΘ [prop. XVI], ΓΕ = ΓΖ [prop. III] et ΓΗ = ΓΘ.

XX.

Si recta unam oppositarum coniugatarum contingit, et per centrum earum duae rectae ducuntur, quarum altera per punctum contactus, altera contingenti parallela est, dum cum altera sectionum deinceps positarum conueniat, recta in puncto concursus sectionem contingens rectae per punctum contactus centrumque ductae parallela erit, rectae autem per puncta contactus centrumque ductae diametri coniugatae oppositarum erunt.

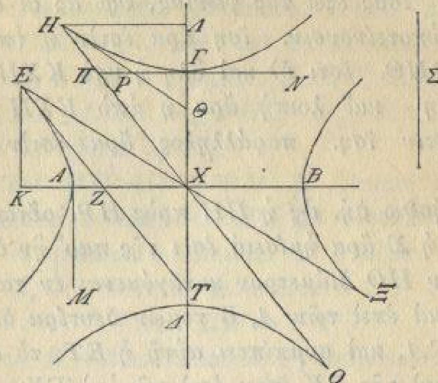
sint oppositae coniugatae, quarum diametri coniugatae sint ΑΒ, ΓΔ, centrum autem Χ, et sectionem ἠγμένῃ, αἱ δὲ διὰ τῶν ἁφῶν καὶ τοῦ κέντρου συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι συζυγεῖς αἱ AB, ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ X, καὶ τῆς A τομῆς ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ EZ καὶ ἐκβληθεῖσα συμπιπτέτω τῇ ΓX κατὰ τὸ T, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ξ, καὶ διὰ τοῦ X τῇ EZ παράλληλος ἤχθω ἡ XH, καὶ διὰ τοῦ H ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘH. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ ΘH τῇ XE, αἱ δὲ HO, EΞ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

ἤχθωσαν γὰρ τεταγμένως αἱ KE, HΛ, ΓPΠ, παρ' ἃς δὲ δύνανται αἱ καταγόμεναι, ἔστωσαν αἱ AM, ΓN. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ BA πρὸς AM, ἡ NΓ πρὸς ΓΔ, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ BA πρὸς AM, τὸ ὑπὸ XKZ πρὸς τὸ ἀπὸ KE, ὡς δὲ ἡ NΓ πρὸς ΓΔ, τὸ ἀπὸ HΛ πρὸς τὸ ὑπὸ XΛΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ XKZ πρὸς τὸ ἀπὸ EK, τὸ ἀπὸ HΛ πρὸς τὸ ὑπὸ XΛΘ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ XKZ πρὸς τὸ ἀπὸ KE τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς XK πρὸς KE καὶ τοῦ τῆς ZK πρὸς KE, τὸ δὲ ἀπὸ HΛ πρὸς τὸ ὑπὸ XΛΘ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει ἡ HΛ πρὸς ΛX, καὶ ἡ HΛ πρὸς ΛΘ· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς XK πρὸς KE καὶ τῆς ZK πρὸς KE ὁ αὐτός ἐστι τῷ συγκειμένῳ λόγῳ ἐκ τοῦ τῆς HΛ πρὸς ΛX καὶ τοῦ τῆς HΛ πρὸς ΛΘ· ὧν ὁ τῆς ZK πρὸς KE λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς HΛ πρὸς ΛX λόγῳ· ἑκάστη γὰρ τῶν EK, KZ, ZE ἑκάστῃ τῶν XΛ, ΛH, HX παράλληλός ἐστι. λοιπὸς ἄρα ὁ τῆς XK πρὸς KE

6. τό] p, om. V, add. e corr. vc. 9. ἔστι V; corr. pc. 10. EΞ] EZΞ V; corr. p? (ζξ?). 15. ἡ] c, e corr. m. 1 V.

A contingens ducatur EZ productaque cum ΓX in T concurrat, et ducatur EX producaturque ad Ξ, et per X rectae EZ parallela ducatur XH, per H autem



sectionem contingens ducatur ΘH. dico, esse ΘH rectae XE parallelam et HO, $E\Xi$ coniugatas esse diametros.

ducantur enim ordinate KE, $H\Lambda$, $\Gamma P\Pi$, parametri autem sint AM, ΓN. iam quoniam est

$BA : AM = N\Gamma : \Gamma\Delta$ [I, 56],

et $BA : AM = XK \times KZ : KE^2$,

$N\Gamma : \Gamma\Delta = H\Lambda^2 : X\Lambda \times \Lambda\Theta$ [I, 37],

erit etiam $XK \times KZ : EK^2 = H\Lambda^2 : X\Lambda \times \Lambda\Theta$. uerum $XK \times KZ : KE^2 = (XK : KE) \times (ZK : KE)$ et $H\Lambda^2 : X\Lambda \times \Lambda\Theta = (H\Lambda : \Lambda X) \times (H\Lambda : \Lambda\Theta)$. itaque

$(XK : KE) \times (ZK : KE) = (H\Lambda : \Lambda X) \times (H\Lambda : \Lambda\Theta)$.

quarum rationum est $ZK : KE = H\Lambda : \Lambda X$ [Eucl. I, 29; VI, 4]; nam singulae EK, KZ, ZE singulis $X\Lambda$, ΛH, HX parallelae sunt [I def. 6]. itaque

$XK : KE = H\Lambda : \Lambda\Theta$.

λόγος ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς $HΛ$ πρὸς $ΛΘ$. καὶ περὶ ἴσας γωνίας τὰς πρὸς τοῖς K, $Λ$ ἀνάλογόν εἰσιν αἱ πλευραί· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ EKX τρίγωνον τῷ $HΘΛ$ καὶ ἴσας ἕξει τὰς γωνίας, ὑφ' ἃς αἱ ὁμόλογοι πλευραὶ ὑποτείνουσιν. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ EXK τῇ ὑπὸ $ΛHΘ$. ἔστι δὲ καὶ ὅλη ἡ ὑπὸ KXH τῇ ὑπὸ $ΛHX$ ἴση· καὶ λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ EXH τῇ ὑπὸ $ΘHX$ ἐστιν ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EX τῇ $HΘ$.

πεποιήσθω δή, ὡς ἡ $ΠH$ πρὸς HP, οὕτως ἡ $ΘH$ πρὸς $Σ$· ἡ $Σ$ ἄρα ἡμίσειά ἐστι τῆς παρ' ἣν δύνανται αἱ ἐπὶ τὴν HO διάμετρον καταγόμεναι ἐν ταῖς $Γ$, $Δ$ τομαῖς. καὶ ἐπεὶ τῶν A, B τομῶν δευτέρα διάμετρός ἐστιν ἡ $ΓΔ$, καὶ συμπίπτει αὐτῇ ἡ ET, τὸ ἄρα ὑπὸ τῆς TX καὶ τῆς EK ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΓX$· ἐὰν γὰρ ἀπὸ τοῦ E τῇ KX παράλληλον ἄγωμεν, τὸ ὑπὸ τῆς TX καὶ τῆς ἀπολαμβανομένης ὑπὸ τῆς παραλλήλου ἴσον ἔσται τῷ ἀπὸ $ΓX$. διὰ δὲ τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ TX πρὸς EK, τὸ ἀπὸ TX πρὸς τὸ ἀπὸ $XΓ$. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ TX πρὸς EK, ἡ TZ πρὸς ZE, τουτέστι τὸ TXZ τρίγωνον πρὸς τὸ EZX, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ TX πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓX$, τὸ XTZ τρίγωνον πρὸς τὸ $XΓΠ$, τουτέστι πρὸς τὸ $HΘX$. ὡς ἄρα τὸ TXZ πρὸς τὸ EZX, τὸ TZX πρὸς τὸ $XHΘ$. ἴσον ἄρα τὸ $HΘX$ τρίγωνον τῷ XEZ. ἔχει δὲ καὶ τὴν ὑπὸ $ΘHX$ γωνίαν τῇ ὑπὸ XEZ γωνίᾳ ἴσην· παράλληλος γάρ ἐστιν ἡ μὲν EX τῇ $HΘ$, ἡ δὲ EZ τῇ HX. ἀντιπεπόνθασιν ἄρα αἱ πλευραὶ αἱ περὶ τὰς ἴσας γωνίας. ἔστιν ἄρα

10. πεποιείσθω V; corr. p c. 14. συμπίπτῃ V; corr. p. 16. ἄγωμεν] ἀγομένην V; corr. Halley; ἀγάγωμεν p. 26. ὑπό] p, om. V. ἴσην] om. V; corr. p.

et latera angulos aequales ad K, $Λ$ positos comprehendentia proportionalia sunt; similes igitur sunt trianguli EKX, $HΘΛ$ et angulos aequales habebunt, sub quibus latera correspondentia subtendunt [Eucl. VI, 6]. erit igitur $\angle EXK = \angle ΛHΘ$. est autem etiam

$$\angle KXH = \angle ΛHX \text{ [Eucl. I, 29]};$$

quare etiam $\angle EXH = \angle ΘHX$. ergo EX rectae $HΘ$ parallela est [Eucl. I, 27].

iam fiat $ΠH : HP = ΘH : Σ$. itaque $Σ$ dimidia est parametrus diametri HO in sectionibus $Γ$, $Δ$ [I, 51]. et quoniam sectionum A, B altera diametrus est $ΓΔ$ [I, 56], et cum ea concurrit ET, erit

$$TX \times EK = ΓX^2;$$

nam si ab E rectam rectae KX parallelam duxerimus, rectangulum comprehensum recta TX rectaque a parallela abscisa aequale erit quadrato $ΓX$ [I, 38]. propterea autem est $TX : EK = TX^2 : XΓ^2$ [Eucl. VI, 17; V def. 9]. est autem [Eucl. VI, 4]

$TX : EK = TZ : ZE = \triangle TXZ : EZX$ [Eucl. VI, 1], et [Eucl. VI, 19]

$TX^2 : ΓX^2 = XTZ : XΓΠ = XTZ : HΘX$ [u. I, 43]. itaque $TXZ : EZX = TZX : XHΘ$. quare [Eucl. V, 9] $HΘX = XEZ$. habent autem etiam $\angle ΘHX = XEZ$ [Eucl. I, 29]; nam parallelae sunt EX, $HΘ$ et EZ, HX. itaque latera aequales angulos comprehendentia in contraria proportione sunt [Eucl. VI, 15]; est igitur $HΘ : EX = EZ : HX$; quare [Eucl. VI, 16]

$$ΘH \times HX = XE \times EZ.$$

et quoniam est $Σ : ΘH = PH : HΠ$, et

$$PH : HΠ = XE : EZ \text{ [Eucl. VI, 4]}$$

(parallelae enim sunt), erit etiam $Σ : ΘH = XE : EZ$.

ὡς ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΕΧ, ἡ ΕΖ πρὸς τὴν ΗΧ· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ὡς δὲ ἡ ΡΗ πρὸς ΗΠ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ· παράλληλοι γάρ· καὶ ὡς ἄρα ἡ Σ πρὸς τὴν ΘΗ, ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ Σ πρὸς ΘΗ, τῆς ΧΗ κοινοῦ ὕψους λαμβανομένης τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, ὡς δὲ ἡ ΧΕ πρὸς ΕΖ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ Σ, ΧΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΗΧ, τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΖ. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΧ, τὸ ὑπὸ ΘΗΧ πρὸς τὸ ὑπὸ ΖΕΧ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΘΗΧ τῷ ὑπὸ ΧΕΖ· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ Σ, ΗΧ τῷ ἀπὸ ΕΧ. καί ἐστι τὸ μὲν ὑπὸ Σ, ΗΧ τέταρτον τοῦ παρὰ τὴν ΗΟ εἴδους· ἥ τε γὰρ ΗΧ τῆς ΗΟ ἐστιν ἡμίσεια, καὶ ἡ Σ τῆς παρ' ἣν δύνανται· τὸ δὲ ἀπὸ ΕΧ τέταρτον τοῦ ἀπὸ τῆς ΕΞ· ἴση γὰρ ἡ ΕΧ τῇ ΧΞ. τὸ ἄρα ἀπὸ τῆς ΕΞ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΗΟ εἴδει. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ ἡ ΗΟ δύναται τὸ παρὰ τὴν ΕΞ εἶδος. αἱ ἄρα ΕΞ, ΗΟ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν Α, Β, Γ, Δ ἀντικειμένων.

κα'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων δεικτέον, ὅτι ἡ σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων πρὸς μίαν τῶν ἀσυμπτώτων ἐστίν.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαί, ὧν αἱ διάμετροι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι ἤχθωσαν αἱ ΑΕ, ΕΓ. λέγω, ὅτι το Ε σημεῖον προς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

1. ἡ] (pr.) om. V; corr. p. ἡ] (alt.) τῇ ΗΘ ἡ V; corr. p. 11. ΖΕΧ] c, Ε e corr. m. 1 V. 15. ἡ Σ] ἧς V; corr. p. 19. ἡ] om. V; corr. p. 20. ΗΟ] ΗΟΣ V; corr. p. 24. μίαν] μιᾷ? 25. τομαί] pv, αἱ τομαί c et deleto αἱ V.

est autem, communi altitudine sumpta XH,

$$\Sigma : \Theta H = \Sigma \times XH : \Theta H \times HX,$$

et $XE : EZ = XE^2 : XE \times EZ$. quare etiam

$$\Sigma \times XH : \Theta H \times HX = XE^2 : XE \times EZ.$$

permutando [Eucl. V, 16]

$$\Sigma \times XH : EX^2 = \Theta H \times HX : ZE \times EX.$$

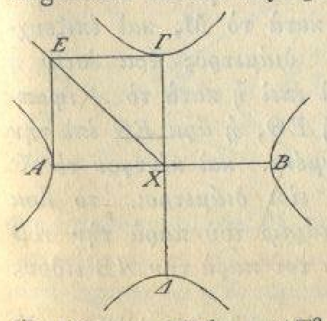
uerum $\Theta H \times HX = XE \times EZ$. quare etiam [Eucl. V, 14] $\Sigma \times HX = EX^2$. et $\Sigma \times HX$ quarta pars est figurae rectae HO adplicatae; nam et HX rectae HO [I, 30] et Σ parametri dimidia est; et

$$EX^2 = \tfrac{1}{4} E\Xi^2;$$

nam $EX = X\Xi$ [I, 30]. itaque $E\Xi^2$ aequale est figurae rectae HO adplicatae. iam similiter demonstrabimus, etiam HO quadratam aequalem esse figurae rectae $E\Xi$ adplicatae. ergo $E\Xi$, HO diametri coniugatae sunt oppositarum A, B, Γ, Δ [I, 56].

XXI.

Iisdem suppositis demonstrandum, concursum contingentium in una asymptotarum esse.



sint sectiones oppositae coniugatae, quarum diametri sint AB, $\Gamma\Delta$, et contingentes ducantur AE, $E\Gamma$. dico, punctum E in asymptota esse.

nam quoniam ΓX^2 aequale est quartae parti figurae ad AB adplicatae [I, 56], et $\Gamma X^2 = AE^2$, etiam AE^2 quartae parti figurae ad AB adplicatae aequale est. ducatur EX;

ἐπεὶ γὰρ τὸ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, τῷ δὲ ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ, καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους. ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ· ἀσύμπτωτος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΧ. τὸ ἄρα Ε σημεῖον πρὸς τῇ ἀσυμπτώτῳ ἐστίν.

κβ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου εὐθεῖα ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα μιᾷ τῶν ἐφεξῆς τομῶν καὶ ταῖς ἀσυμπτώτοις, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῶν ἀσυμπτώτων ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνῳ.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, ἀσύμπτωτοι δὲ τῶν τομῶν ἔστωσαν αἱ ΧΕΖ, ΧΗΘ, καὶ ἀπὸ τοῦ κέντρου τοῦ Χ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ ΧΓΔ, καὶ παράλληλος αὐτῇ ἤχθω τέμνουσα τήν τε ἐφεξῆς τομὴν καὶ τὰς ἀσυμπτώτους ἡ ΘΕ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΕΚΘ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

τετμήσθω δίχα ἡ ΚΛ κατὰ τὸ Μ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΜΧ ἐκβεβλήσθω· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΒ τῶν Α, Β τομῶν. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΘ, ἡ ἄρα ΕΘ ἐπὶ τὴν ΑΒ τεταγμένως ἐστὶ κατηγμένη. καὶ κέντρον τὸ Χ· αἱ ΑΒ, ΓΔ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους. τῷ δὲ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν ΑΒ εἴδους

4. τοῦ] bis V, corr. cvp. 12. τῶν] (alt.) addidi; om. V. 17. ΧΕΖ, ΧΗΘ] ΕΧΖ, ΗΧΘ p, Halley cum Commandino; sed cfr. lin. 18. 19. ΘΕ] ΘΧ V; corr. Memus (*et*); ΘΚΕ p.

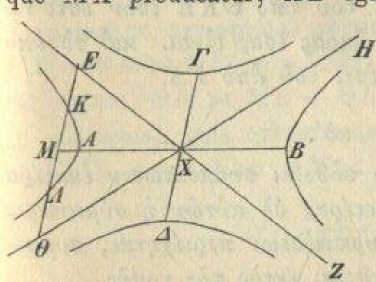
ea igitur asymptota est [prop. I]. ergo *E* punctum in asymptota est.

XXII.

Si in oppositis coniugatis e centro recta ad quamuis sectionum ducitur, eique parallela recta ducitur cum una sectionum deinceps positarum asymptotisque concurrens, rectangulum comprehensum partibus rectae ductae inter sectionem asymptotasque ortis aequale est quadrato radii.

sint *Α*, *Β*, *Γ*, *Δ* sectiones oppositae coniugatae, asymptotae autem sectionum sint *ΧΕΖ*, *ΧΗΘ*, et a centro *Χ* ducatur recta *ΧΓΔ*, eique parallela ducatur *ΘΕ* secans et sectionem deinceps positam et asymptotas. dico, esse $EK \times K\Theta = \Gamma X^2$.

ΚΛ in *Μ* in duas partes aequales secetur, ductaque *ΜΧ* producatur; *ΑΒ* igitur diametrus est sec-



tionum *Α*, *Β* [I, 51 coroll.]. et quoniam recta in *Α* contingens rectae *ΕΘ* parallela est [prop. V], *ΕΘ* ad *ΑΒ* ordinate ducta est. et *Χ* centrum est; itaque *ΑΒ*, *ΓΔ* diametri coniugatae sunt [I def. 6]. quare ΓX^2 aequale est quartae parti figurae ad *ΑΒ* adplicatae [I, 56]. uerum quartae parti figurae ad *ΑΒ* adplicatae aequale est $\Theta K \times KE$ [prop. X]. ergo etiam

$$\Theta K \times KE = \Gamma X^2.$$

ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ· καὶ τὸ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΓΧ.

κγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἐκ τοῦ κέντρου τις ἀχθῇ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ συμπίπτουσα ταῖς ἐφεξῆς τρισὶ τομαῖς, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τῆς ἀχθείσης τμημάτων τῶν γινομένων μεταξὺ τῶν τριῶν τομῶν διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τετραγώνου.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, κέντρον δὲ τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ ἀπὸ τοῦ Χ πρὸς ὁποιανοῦν τῶν τομῶν προσπιπτέτω τις εὐθεῖα ἡ ΓΧ, καὶ τῇ ΓΧ παράλληλος ἤχθω τέμνουσα τὰς ἐφεξῆς τρεῖς τομὰς ἡ ΚΛ. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΜΛ διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

ἤχθωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ· τὸ ἄρα ἀπὸ ΓΧ ἴσον ἐστὶν ἑκατέρῳ τῶν ὑπὸ ΘΜΕ, ΘΚΕ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΜΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΘΚΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΜΚ διὰ τὸ τὰς ἄκρας ἴσας εἶναι. καὶ τὸ ὑπο ΛΜΚ ἄρα διπλάσιόν ἐστι τοῦ ἀπὸ ΓΧ.

κδ'.

Ἐὰν παραβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς τῆς τομῆς.

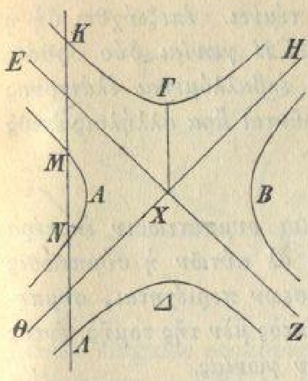
ἔστω παραβολὴ ἡ ΑΒΓΔ, καὶ τῇ ΑΒΓΔ δύο εὐθεῖαι συμπιπτέτωσαν αἱ ΑΒ, ΓΔ, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων

---

12. ὁποιανοῦν] ποιανοῦν V; corr. p. 16. σύμπτωτοι V; corr. p. 28. συμπτώσεως V; corr. m. 2 v.

XXIII.

Si in oppositis coniugatis e centro recta ad quamuis sectionum ducitur, eique parallela recta ducitur cum tribus sectionibus deinceps positis concurrens, rectangulum comprehensum partibus rectae ductae inter tres sectiones ortis duplo maius est quadrato radii.



sint A, B, Γ, Δ sectiones oppositae coniugatae, centrum autem sectionum sit X, et a X ad quamuis sectionum adcidat recta aliqua ΓX, rectaeque ΓX parallela ducatur $K\Lambda$ tres sectiones deinceps positas secans. dico, esse $KM \times M\Lambda = 2\,\Gamma X^2$.

ducantur asymptotae sectionum EZ, $H\Theta$; itaque $\Gamma X^2 = \Theta M \times ME$[prop. XXII] $= \Theta K \times KE$[prop. XI]. est autem $\Theta M \times ME + \Theta K \times KE = \Lambda M \times MK$ [u. Eutocius], quia extrema aequalia sunt [prop. VIII et XVI]. ergo etiam $\Lambda M \times MK = \Gamma X^2$.

XXIV.

Si cum parabola duae rectae concurrunt singulae in binis punctis, neutriusque earum punctum concursus punctis concursus alterius continetur, rectae inter se extra sectionem concurrent.

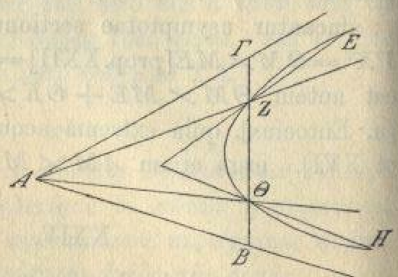
sit parabola $AB\Gamma\Delta$, et cum $AB\Gamma\Delta$ duae rectae concurrant AB, $\Gamma\Delta$, neutriusque earum punctum περιεχέσθω. λέγω, ὅτι ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις.

ἤχθωσαν διὰ τῶν Β, Γ διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΕΒΖ, ΗΓΘ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ καὶ καθ' ἓν μόνον σημεῖον ἑκατέρα τὴν τομὴν τέμνει. ἐπεζεύχθω δὴ ἡ ΒΓ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΕΒΓ, ΒΓΗ γωνίαι δύο ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν, αἱ δὲ ΔΓ, ΒΑ ἐκβαλλόμεναι ἐλάττονας ποιοῦσι δύο ὀρθῶν. συμπεσοῦνται ἄρα ἀλλήλαις ἐκτὸς τῆς τομῆς.

κε'.

Ἐὰν ὑπερβολῇ δύο εὐθεῖαι συμπίπτωσιν ἑκατέρα κατὰ δύο σημεῖα, μηδετέρας δὲ αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας συμπτώσεων περιέχηται, συμπεσοῦνται ἀλλήλαις αἱ εὐθεῖαι ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστω ὑπερβολή, ἧς ἀσύμπτωτοι αἱ ΑΒ, ΑΓ, καὶ τεμνέτωσαν δύο εὐθεῖαι τὴν τομὴν αἱ ΕΖ, ΗΘ, καὶ μηδετέρας αὐτῶν ἡ σύμπτωσις ὑπὸ τῶν τῆς ἑτέρας περιεχέσθω. λέγω, ὅτι αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΓΑΒ γωνίας.

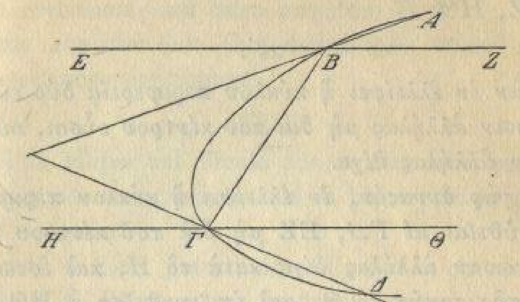


ἐπιζευχθεῖσαι γὰρ αἱ ΑΖ, ΑΘ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΘ. καὶ ἐπεὶ αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι τέμνουσι τὰς ὑπὸ ΑΖΘ, ΑΘΖ γωνίας, εἰσὶ δὲ αἱ

6. ΒΓΗ] p, om. V. 13. συμπτώσεως V; corr. Memus. 15. γωνίαν V; corr. p.

concursus punctis concursus alterius contineatur. dico, eas productas demum inter se concursuras esse.

per *Β*, *Γ* diametri sectionis ducantur *ΕΒΖ*, *ΗΓΘ*; itaque parallelae sunt [I, 51 coroll.] et in uno tantum



puncto singulae sectionem secant [I, 26]. iam ducatur *ΒΓ*; itaque ∠ *ΕΒΓ* + *ΗΓΒ* duobus rectis aequales sunt [Eucl. I, 29], *ΔΓ* et *ΒΑ* autem productae angulos duobus rectis minores efficiunt. ergo extra sectionem inter se concurrent [Eucl. I αἰτ. 5].

XXV.

Si cum hyperbola duae rectae concurrunt singulae in binis punctis, neutriusque earum punctum concursus punctis concursus alterius continetur, rectae inter se concurrent extra sectionem, sed intra angulum sectionem comprehendentem.

sit hyperbola, cuius asymptotae sint *ΑΒ*, *ΑΓ*, duaeque rectae *ΕΖ*, *ΗΘ* sectionem secent, neutriusque earum punctum concursus punctis concursus alterius contineatur. dico, *ΕΖ*, *ΗΘ* productas extra sectionem, sed intra angulum *ΓΑΒ* concursuras esse.

εἰρημέναι γωνίαι δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες, αἱ ΕΖ, ΗΘ ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται ἀλλήλαις ἐκτὸς μὲν τῆς τομῆς, ἐντὸς δὲ τῆς ὑπὸ ΒΑΓ γωνίας.

ὁμοίως δὴ δείξομεν, κἂν ἐφαπτόμεναι ὦσι τῶν τομῶν αἱ ΕΖ, ΗΘ.

κϛ'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἐν ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι αἱ ΓΔ, ΕΖ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΗΘ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ Α, Β.

ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τὴν ΕΖ δίχα τέμνουσα, ἡ ἄρα κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι καὶ τῇ ΓΔ. ὥστε καὶ ἡ ΕΖ παράλληλός ἐστι τῇ ΓΔ· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα αἱ ΓΔ, ΕΖ δίχα τέμνουσιν ἀλλήλας.

κζ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσιν, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς ᾖ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου.

ἔστω ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΓΑΔ, ΕΒΖ, καὶ ἐπεζεύχθω

4. κἂν] καί V; corr. p. 14. τά] τό V; corr. p. 19. δίχα] om. V; corr. p. 27. ΕΒΖ] ΒΕΖ V; corr. p.

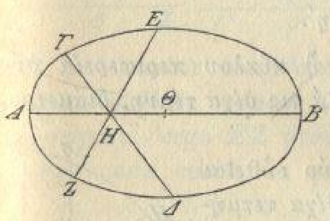
ductae enim *AZ*, *AΘ* producantur, ducaturque *ZΘ*. et quoniam *EZ*, *HΘ* productae angulos *AZΘ*, *AΘZ* secant, hi autem anguli duobus rectis minores sunt [Eucl. I, 17], *EZ*, *HΘ* productae inter se concurrent extra sectionem, sed intra angulum *BAΓ*.

iam similiter hoc demonstrabimus, etiam si *EZ*, *HΘ* sectiones contingunt.

XXVI.

Si in ellipsi uel circulo duae rectae inter se secant non per centrum positae, non in binas partes aequales inter se secant.

nam si fieri potest, in ellipsi uel circulo duae rectae *ΓΔ*, *EZ* non per centrum positae inter se in binas partes aequales secent in *H*, centrum autem sectionis sit *Θ*, ductaque *HΘ* ad *A*, *B* producatur.



iam quoniam *AB* diametrus est rectam *EZ* in duas partes aequales secans, recta in *A* contingens rectae *EZ* parallela est [prop. VI]. similiter igitur demonstrabimus, eam etiam rectae *ΓΔ* parallelam esse. quare etiam *EZ* rectae *ΓΔ* parallela est [Eucl. I, 30]; quod fieri non potest. ergo *ΓΔ*, *EZ* inter se in binas partes aequales non secant.

XXVII.

Si ellipsim uel circulum duae rectae contingunt, rectae contingentes parallelae erunt, si recta puncta contactus coniungens per centrum sectionis cadit, sin minus, in eadem parte centri concurrent.

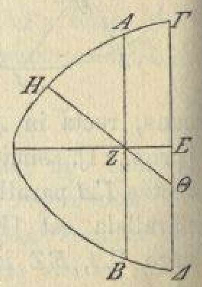
ἡ AB καὶ ἔστω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ EZ.

ἐπεὶ γὰρ διάμετρός ἐστιν ἡ AB τῆς τομῆς, καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ A ἡ $\Gamma\Delta$, ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα παράλληλός ἐστι ταῖς ἐπὶ τὴν AB τεταγμένως κατηγμέναις. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ ἡ BZ παράλληλός ἐστι ταῖς αὐταῖς. καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα τῇ EZ παράλληλός ἐστι.

μὴ ἐρχέσθω δὴ ἡ AB διὰ τοῦ κέντρου, ὡς ἔχει ἐπὶ τῆς δευτέρας καταγραφῆς, καὶ ἤχθω διάμετρος ἡ $A\Theta$, καὶ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη ἡ $K\Theta\Lambda$· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ $K\Lambda$ τῇ $\Gamma\Delta$. ἡ ἄρα EZ ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται τῇ $\Gamma\Delta$ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη τοῦ κέντρου, ἐν οἷς ἐστιν ἡ AB.

κη'.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο παραλλήλους εὐθείας εὐθεῖά τις δίχα τέμνῃ, διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.



ἐν γὰρ κώνου τομῇ δύο εὐθεῖαι παράλληλοι αἱ AB, $\Gamma\Delta$ δίχα τετμήσθωσαν κατὰ τὰ E, Z, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ EZ ἐκβεβλήσθω. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

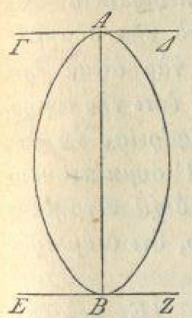
εἰ γὰρ μή, ἔστω, εἰ δυνατόν, ἡ $HZ\Theta$. ἡ ἄρα κατὰ τὸ H ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ AB. ὥστε ἡ αὐτὴ παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$. καί ἐστι διάμετρος ἡ $H\Theta$· ἴση ἄρα ἡ $\Gamma\Theta$ τῇ $\Theta\Delta$· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἡ ΓE τῇ $E\Delta$ ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν

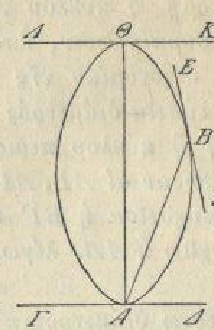
---

24. $HZ\Theta$] p, $H\Theta Z$ V.

sit ellipsis uel circulus AB, contingantque $\Gamma A\Delta$, EBZ, et ducatur AB cadatque prius per centrum. dico, $\Gamma\Delta$ et EZ parallelas esse.

nam quoniam AB diametrus sectionis est, $\Gamma\Delta$ autem in A contingit, $\Gamma\Delta$ rectis ad AB ordinate ductis parallela est [I, 17]. eadem igitur de causa etiam BZ iisdem parallela est. ergo etiam $\Gamma\Delta$ et EZ parallelae sunt [Eucl. I, 30].





iam AB per centrum ne cadat, ut in secunda figura est, et ducatur diametrus $A\Theta$, per Θ autem contingens $K\Theta\Lambda$; itaque $K\Lambda$ et $\Gamma\Delta$ parallelae sunt [u. supra]. ergo EZ producta cum $\Gamma\Delta$ concurret in eadem parte centri, in qua est AB [Eucl. I αἰτ. 5].

XXVIII.

Si in coni sectione uel circulo recta aliqua duas rectas parallelas in binas partes secat, diametrus sectionis erit.

in coni sectione enim duae rectae parallelae AB, $\Gamma\Delta$ in E, Z in binas partes aequales secentur, et ducta EZ producatur. dico, eam diametrum sectionis esse.

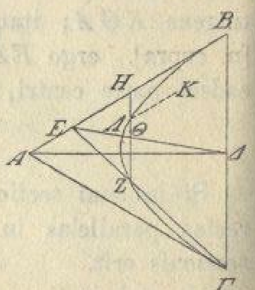
nam si minus, sit $H\Theta Z$, si fieri potest. itaque recta in H contingens rectae AB parallela est [prop. V—VI]. quare eadem rectae $\Gamma\Delta$ parallela est ἡ $H\Theta$. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς EZ. ἡ EZ ἄρα διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς.

κθ΄.

Ἐὰν ἐν κώνου τομῇ ἢ κύκλου περιφερείᾳ δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀπὸ τῆς συμπτώσεως αὐτῶν ἐπὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια, ἧς ἐφαπτόμεναι εὐθεῖαι ἤχθωσαν αἱ AB, $A\Gamma$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ A, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ $B\Gamma$ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Delta$. λέγω, ὅτι διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω διάμετρος ἡ ΔE, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $E\Gamma$· τεμεῖ δὴ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Z, καὶ διὰ τοῦ Z τῇ $\Gamma\Delta B$ παράλληλος ἤχθω ἡ ZKH. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔB, ἴση καὶ ἡ $Z\Theta$ τῇ ΘH. καὶ ἐπεὶ ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $B\Gamma$, ἔστι δὲ καὶ ἡ ZH τῇ $B\Gamma$ παράλληλος, καὶ ἡ ZH ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ. ἴση ἄρα ἡ $Z\Theta$ τῇ ΘK· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ ΔE. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $A\Delta$.



5. ἀπό] ἡ ἀπό p. 13. ΔE] corr. ex BE m. 1. V, BE cv, $E\Delta$ p. 16. ZKH] ZHK V, $Z\Theta H$ p et Comm.; corr.

[Eucl. I, 30]. et $H\Theta$ diametrus est; itaque $\Gamma\Theta = \Theta\Delta$ [I def. 4]. quod absurdum est; supposuimus enim, esse $\Gamma E = E\Delta$. itaque $H\Theta$ diametrus non est. iam similiter demonstrabimus, ne aliam quidem ullam diametrum esse praeter EZ. ergo EZ diametrus sectionis erit.

XXIX.

Si in coni sectione uel circulo duae rectae contingentes concurrunt, recta a puncto earum concursus ad punctum medium rectae puncta contactus coniungentis ducta diametrus sectionis est.

sit coni sectio uel circulus, quam contingentes ducantur rectae AB, $A\Gamma$ in A concurrentes, et ducta $B\Gamma$ in Δ in duas partes aequales secetur, ducaturque $A\Delta$. dico, eam diametrum sectionis esse.

nam si fieri potest, sit ΔE diametrus, ducaturque $E\Gamma$; ea igitur sectionem secabit [I, 35—36]. secet in Z, et per Z rectae $\Gamma\Delta B$ parallela ducatur ZKH. iam quoniam $\Gamma\Delta = \Delta B$, erit etiam [Eucl. VI, 4] $Z\Theta = \Theta H$. et quoniam recta in A contingens rectae $B\Gamma$ parallela est [prop. V—VI], et etiam ZH rectae $B\Gamma$ parallela est, erit etiam ZH rectae in A contingenti parallela. itaque $Z\Theta = \Theta K$ [I, 46—47]; quod fieri non potest. itaque ΔE diametrus non est. iam similiter demonstrabimus, ne aliam quidem ullam diametrum esse praeter $A\Delta$.

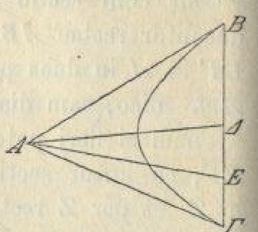
Halley. 17. ἐστίν — 18. ἴση] om. V, corr. Memus. 19. A] cv, corr. ex A m. 1 V. 20. ἔστι] καὶ ἔστι V, corr. Memus.

λ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἀγομένη διάμετρος δίχα τεμεῖ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $B\Gamma$, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο ἐφαπτόμεναι αἱ BA, $A\Gamma$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ A, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $B\Gamma$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ A διάμετρος τῆς τομῆς ἡ $A\Delta$. λέγω, ὅτι ἐστὶν ἴση ἡ ΔB τῇ $\Delta\Gamma$.

μὴ γάρ, ἀλλ' εἰ δυνατόν, ἔστω ἴση ἡ BE τῇ $E\Gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AE· ἡ AE ἄρα διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς. ἔστι δὲ καὶ ἡ $A\Delta$· ὅπερ ἄτοπον. εἴτε γὰρ ἔλλειψίς ἐστιν ἡ τομή, τὸ A, καθ' ὃ συμβάλλουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι, κέντρον ἔσται τῆς τομῆς ἐκτός· ὅπερ ἀδύνατον· εἴτε παραβολή ἐστιν ἡ τομή, συμπίπτουσιν ἀλλήλαις αἱ διάμετροι· εἴτε ὑπερβολή ἐστι, καὶ συμπίπτουσι τῇ τομῇ αἱ BA, $A\Gamma$ μὴ περιέχουσαι τὰς ἑαυτῶν συμπτώσεις, ἐντός ἐστι τῆς περιεχούσης τὴν ὑπερβολὴν γωνίας· ἀλλὰ καὶ ἐπ' αὐτῆς· κέντρον γὰρ ὑπόκειται διαμέτρων οὐσῶν τῶν ΔA, AE· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ BE τῇ $E\Gamma$ ἐστιν ἴση.



λα'.

Ἐὰν ἑκατέρας τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται, ἐὰν μὲν ἡ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα διὰ τοῦ

11. εἰ] ἡ V; corr. p. 17. ἐκτός] ἐκτὸς ὄν?

XXX.

Si coni sectionem uel circulum duae rectae contingentes concurrunt, diametrus a puncto concursus ducta rectam puncta contactus coniungentem in duas partes aequales secabit.

sit $B\Gamma$ coni sectio uel circulus, eamque contingentes duae rectae ducantur BA, $A\Gamma$ in A concurrentes, et ducatur $B\Gamma$, per A autem diametrus sectionis ducatur $A\Delta$. dico, esse $\Delta B = \Delta\Gamma$.

ne sit enim, sed, si fieri potest, sit $BE = E\Gamma$, ducaturque AE; AE igitur diametrus est sectionis [prop. XXIX]. uerum etiam $A\Delta$ diametrus est; quod absurdum est. nam siue ellipsis est sectio, A punctum, in quo diametri inter se concurrunt, centrum erit sectionis extra sectionem positum; quod fieri non potest; siue sectio parabola est, diametri inter se concurrunt [contra I, 51 coroll.]; siue hyperbola est, et BA, $A\Gamma$ cum sectione concurrunt puncta concursus non comprehendentes, punctum earum concursus intra angulum hyperbolam comprehendentem positum est [prop. XXV extr.]; uerum etiam in eo positum est; nam supposuimus, centrum id esse, si quidem diametri sunt ΔA, AE; quod absurdum est. ergo non est $BE = E\Gamma$.

XXXI.

Si utramque oppositam duae rectae contingunt, contingentes parallelae erunt, si recta puncta contactus coniungens per centrum cadit, sin minus, in eadem parte concurrent, in qua est centrum.

sint sectiones oppositae A, B, easque contingant κέντρου πίπτῃ, παράλληλοι ἔσονται αἱ ἐφαπτόμεναι, ἐὰν δὲ μή, συμπεσοῦνται ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν ἔστωσαν αἱ $\Gamma A \Delta$, EBZ κατὰ τὰ A, B, ἡ δὲ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B ἐπιζευγνυμένη πιπτέτω πρότερον διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν. λέγω, ὅτι παράλληλός ἐστιν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ EZ.

ἐπεὶ γὰρ ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, ὧν διάμετρός ἐστιν ἡ AB, καὶ μιᾶς αὐτῶν ἐφάπτεται ἡ $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ A, ἡ ἄρα διὰ τοῦ B τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς. ἐφάπτεται δὲ καὶ ἡ EZ· παράλληλός ἐστιν ἄρα ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ EZ.

μὴ ἔστω δὴ ἡ ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B διὰ τοῦ κέντρου τῶν τομῶν, καὶ ἤχθω διάμετρος τῶν τομῶν ἡ AH, καὶ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΘK· ἡ ΘK ἄρα παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$. καὶ ἐπεὶ ὑπερβολῆς εὐθεῖαι ἐφάπτονται αἱ EZ, ΘK, συμπεσοῦνται ἄρα. καί ἐστι παράλληλος ἡ ΘK τῇ $\Gamma\Delta$· καὶ αἱ $\Gamma\Delta$, EZ ἄρα ἐκβαλλόμεναι συμπεσοῦνται. καὶ φανερόν, ὅτι ἐπὶ ταὐτὰ τῷ κέντρῳ.

λβ'.

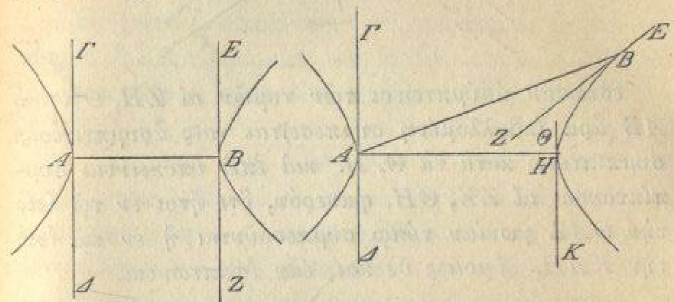
Ἐὰν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι συμπίπτωσι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ἢ κατὰ δύο τέμνουσαι, ἐκβληθεῖσαι δὲ αἱ εὐθεῖαι συμπίπτωσιν, ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ καὶ τῶν ἀντικειμένων ἤτοι καθ' ἓν ἐφαπτόμεναι ἤτοι κατὰ δύο τέμνουσαι εὐθεῖαι αἱ AB, $\Gamma\Delta$, καὶ ἐκβαλλόμεναι συμπιπτέτωσαν.

1. αἱ] om. V; corr. p. 22. *συμπίπτουσι* V; corr. p. 24. *συμπίπτουσιν* V; corr. p.

$\Gamma A \Delta$, EBZ in punctis A, B, recta autem ab A ad B ducta prius per centrum cadat. dico, parallelas esse $\Gamma\Delta$ et EZ.

nam quoniam sectiones oppositae sunt, quarum diametrus est AB, alteramque earum contingit $\Gamma\Delta$ in A, recta per B rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducta sectionem contingit [I, 44]. uerum etiam EZ contingit. ergo $\Gamma\Delta$, EZ parallelae sunt.

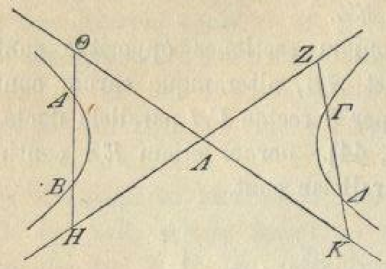


iam recta ab A ad B ducta per centrum sectionum ne cadat, ducaturque diametrus sectionum AH, et sectionem contingens ducatur ΘK; itaque ΘK et $\Gamma\Delta$ parallelae sunt [u. supra]. et quoniam rectae EZ, ΘK hyperbolam contingunt, concident [prop. XXV extr.]. et ΘK, $\Gamma\Delta$ parallelae sunt. ergo etiam $\Gamma\Delta$, EZ productae concurrent. et manifestum est, eas concurrere in eadem parte, in qua sit centrum.

XXXII.

Si cum utraque opposita rectae concurrunt aut in singulis punctis contingentes aut in binis secantes, et productae rectae illae concurrunt, punctum earum concursus in angulo deinceps posito angulo sectionem comprehendenti erit positum.

λέγω, ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἔσται ἐν τῇ ἐφεξῆς γωνίᾳ τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.



ἔστωσαν ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ ZH, ΘK· ἡ AB ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. συμπιπτέτω κατὰ τὰ Θ, H. καὶ ἐπεὶ ὑπόκεινται συμπίπτουσαι αἱ ZK, ΘH, φανερόν, ὅτι ἤτοι ἐν τῷ ὑπὸ τὴν $\Theta\Delta Z$ γωνίαν τόπῳ συμπεσοῦνται ἢ ἐν τῷ ὑπὸ τὴν $K\Delta H$. ὁμοίως δὲ καί, ἐὰν ἐφάπτωνται.

λγ'.

Ἐὰν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖα συμπίπτουσα ἐκβληθεῖσα ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πίπτῃ τῆς τομῆς, οὐ συμπεσεῖται τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἀλλὰ πεσεῖται διὰ τῶν τριῶν τόπων, ὧν ἐστιν εἷς μὲν ὁ ὑπὸ τὴν περιέχουσαν γωνίαν τὴν τομήν, δύο δὲ οἱ ὑπὸ τὰς γωνίας τὰς ἐφεξῆς τῆς περιεχούσης τὴν τομὴν γωνίας.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὴν A τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta$ καὶ ἐκβαλλομένη ἐφ' ἑκάτερα ἐκτὸς πιπτέτω τῆς τομῆς. λέγω, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ οὐ συμπίπτει τῇ B τομῇ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ EZ, $H\Theta$·

3. συμπτωτοι V; corr. p. 6. ZK] ZH V; corr. Halley. 8. τήν] p, om. V.

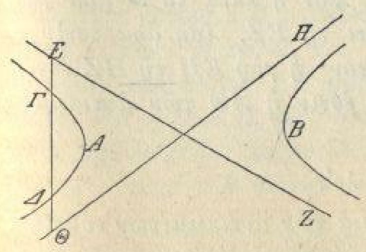
sint sectiones oppositae sectionesque oppositas aut in singulis punctis contingentes aut in binis secantes rectae AB, $\Gamma\Delta$, eaeque productae concurrant. dico, punctum earum concursus in angulo deinceps posito angulo sectionem comprehendenti esse positum.

asymptotae sectionum sint ZH, ΘK; itaque AB producta cum asymptotis concurret [prop. VIII]. concurrat in Θ, H. et quoniam supposuimus, ZK et ΘH concurrere, manifestum est, eas aut in spatio sub angulo $\Theta\Delta Z$ concurrere aut in spatio sub $K\Delta H$. et similiter etiam, si contingunt [prop. III].

XXXIII.

Si recta, quae cum altera opposita concurrit, in utramque partem producta extra sectionem cadit, cum altera sectione non concurret, sed per tria spatia cadet, quorum unum est spatium sub angulo sectionem comprehendenti positum, duo autem spatia sub angulis angulo sectionem comprehendenti deinceps positis.

sint oppositae sectiones A, B, sectionemque A secet recta aliqua $\Gamma\Delta$ et in utramque partem producta extra sectionem cadat. dico, rectam $\Gamma\Delta$ cum B sectione non concurrere.



ducantur enim asymptotae sectionum EZ, $H\Theta$; $\Gamma\Delta$ igitur producta cum asymptotis concurrit [prop. VIII]. concurrit autem in E, Θ solis. ergo cum B sectione non concurret.

ἡ $\Gamma\Delta$ ἄρα ἐκβαλλομένη συμπεσεῖται ταῖς ἀσυμπτώτοις. οὐ συμπίπτει δὲ κατ' ἄλλα ἢ τὰ E, Θ. ὥστε οὐ συμπεσεῖται οὐδὲ τῇ B τομῇ.

καὶ φανερόν, ὅτι διὰ τῶν τριῶν τόπων πεσεῖται. ἐὰν γὰρ ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων συμπίπτῃ τις εὐθεῖα, οὐδεμιᾷ τῶν ἀντικειμένων συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα. εἰ γὰρ συμπεσεῖται κατὰ δύο σημεῖα, διὰ τὸ προδεδειγμένον τῇ ἑτέρᾳ τομῇ οὐ συμπεσεῖται.

λδ'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖά τις ἐπιψαύῃ, καὶ ταύτῃ παράλληλος ἀχθῇ ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ, ἡ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ μέσην τὴν παράλληλον ἀγομένη εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς A ἐφαπτέσθω τις εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta$ κατὰ τὸ A, καὶ τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἐν τῇ ἑτέρᾳ τομῇ ἡ EZ, καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ H, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AH. λέγω, ὅτι ἡ AH διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω ἡ $A\Theta K$. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$. ἀλλὰ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ παράλληλός ἐστι τῇ EZ· καὶ ἡ κατὰ τὸ Θ ἄρα ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EZ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῇ KZ· ὅπερ ἀδύνατον· ἡ γὰρ EH τῇ HZ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα διάμετρός ἐστιν ἡ $A\Theta$ τῶν ἀντικειμένων. ἡ AB ἄρα.

λε'.

Ἐὰν ἡ διάμετρος ἐν μιᾷ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖάν τινα δίχα τέμνῃ, ἡ ἐπιψαύουσα τῆς ἑτέρας τομῆς κατὰ

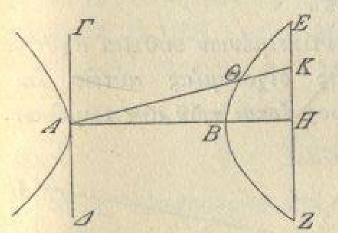
13. διάμετρον V; corr. p. 17. τό] bis V; corr. cvp.

et manifestum est, eam per tria illa spatia cadere. nam si recta cum utraque opposita concurrit, cum neutra oppositarum in duobus punctis concurret; si enim in duobus punctis concurret, propter id, quod supra demonstratum est, cum altera sectione non concurret.

XXXIV.

Si recta alteram oppositarum contingit, eique parallela in altera sectione ducitur recta, recta a puncto contactus ad mediam parallelam ducta diametrus erit oppositarum.

sint sectiones oppositae A, B, et alteram earum A contingat recta aliqua $\Gamma\Delta$ in A, rectaeque $\Gamma\Delta$ parallela in altera sectione ducatur EZ et in H in duas partes aequales secetur, ducaturque AH. dico, AH diametrum esse oppositarum.



nam si fieri potest, sit $A\Theta K$. recta igitur in Θ contingens rectae $\Gamma\Delta$ parallela est [prop. XXXI]. est autem etiam $\Gamma\Delta$ rectae EZ parallela; quare recta in Θ contingens rectae EZ parallela est [Eucl. I, 30]. itaque $EK = KZ$ [I, 47]; quod fieri non potest; est enim $EH = HZ$. itaque $A\Theta$ diametrus oppositarum non est. ergo AB diametrus est.

XXXV.

Si diametrus in altera oppositarum rectam aliquam in duas partes aequales secat, recta alteram sectionem τὸ πέρας τῆς διαμέτρου παράλληλος ἔσται τῇ δίχα τεμνομένῃ εὐθείᾳ.

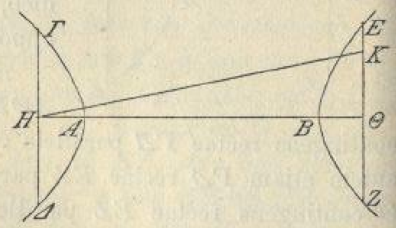
ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, ἡ δὲ διάμετρος αὐτῶν ἡ AB τεμνέτω ἐν τῇ B τομῇ δίχα τὴν $\Gamma\Delta$ εὐθεῖαν κατὰ τὸ E. λέγω, ὅτι ἡ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$.

εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς παράλληλος ἡ ΔZ· ἴση ἄρα ἡ ΔH τῇ HZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ $E\Gamma$ ἴση. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓZ τῇ EH· ὅπερ ἀδύνατον· ἐκβαλλομένη γὰρ αὐτῇ συμπίπτει. οὐκ ἄρα παράλληλός ἐστιν ἡ ΔZ τῇ κατὰ τὸ A ἐφαπτομένῃ τῆς τομῆς οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $\Gamma\Delta$.

λς'.

Ἐὰν ἐν ἑκατέρᾳ τῶν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἀχθῶσι παράλληλοι οὖσαι, ἡ τὰς διχοτομίας αὐτῶν ἐπιζευγνύουσα εὐθεῖα διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ἑκατέρᾳ αὐτῶν ἤχθωσαν εὐθεῖαι αἱ $\Gamma\Delta$, EZ, καὶ ἔστωσαν παράλληλοι, καὶ τετμήσθω ἑκατέρα αὐτῶν δίχα κατὰ τὰ H, Θ σημεῖα, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $H\Theta$. λέγω, ὅτι ἡ $H\Theta$ διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων.

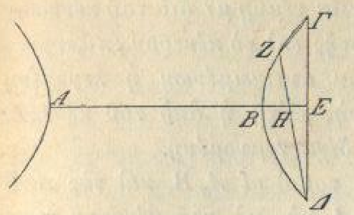


εἰ γὰρ μή, ἔστω ἡ HK. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $\Gamma\Delta$· ὥστε καὶ τῇ EZ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ EK τῇ KZ· ὅπερ ἀδύνατον, ἐπεὶ καὶ

4. B] δίχα V; corr. p.

in termino diametri contingens rectae in duas partes aequales sectae parallela erit.

sint A, B sectiones oppositae, diametrus autem earum AB in sectione B rectam $\Gamma\Delta$ in E in duas partes aequales secet. dico, rectam in A sectionem contingentem rectae $\Gamma\Delta$ parallelam esse.



nam si fieri potest, sit ΔZ rectae in A sectionem contingenti parallela; itaque $\Delta H = HZ$ [I, 48]. est autem etiam $\Delta E = E\Gamma$. itaque ΓZ, EH parallelae sunt [Eucl. VI, 2]; quod fieri non potest; nam ΓZ producta cum EH concurrit [I, 22]. ergo ΔZ rectae in A sectionem contingenti parallela non est nec ulla alia praeter $\Gamma\Delta$.

XXXVI.

Si in utraque opposita rectae ducuntur parallelae, recta puncta media earum coniungens diametrus oppositarum erit.

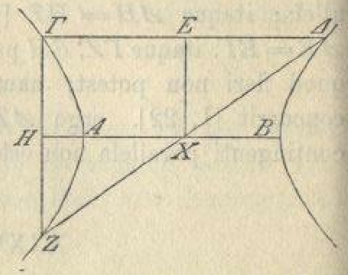
sint A, B sectiones oppositae, et in utraque ducantur rectae $\Gamma\Delta$, EZ sintque parallelae, et utraque earum in punctis H, Θ in binas partes aequales secetur, ducaturque $H\Theta$. dico, $H\Theta$ diametrum esse oppositarum.

nam si minus, sit HK. recta igitur in A contingens rectae $\Gamma\Delta$ parallela est [prop. V]; quare etiam rectae EZ [Eucl. I, 30]. itaque erit $EK = KZ$ [I, 48]; quod fieri non potest, quoniam est $E\Theta = \Theta Z$. ita-ἡ $E\Theta$ τῇ ΘZ ἐστιν ἴση. οὐκ ἄρα ἡ HK διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων. ἡ $H\Theta$ ἄρα.

λζ'.

Ἐὰν ἀντικειμένας εὐθεῖα τέμνῃ μὴ διὰ τοῦ κέντρου, ἡ ἀπὸ τῆς διχοτομίας αὐτῆς ἐπὶ τὸ κέντρον ἐπιζευγνυμένη διάμετρός ἐστι τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἀγομένη παράλληλος τῇ δίχα τεμνομένῃ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ τὰς A, B τεμνέτω τις εὐθεῖα ἡ $\Gamma\Delta$ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσα καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ E, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ XE, καὶ διὰ τοῦ X τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἤχθω ἡ AB. λέγω, ὅτι αἱ AB, EX συζυγεῖς εἰσι διάμετροι τῶν τομῶν.



ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΔX καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓZ. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΔE τῇ $E\Gamma$ ἴση· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ EX τῇ $Z\Gamma$. ἐκβεβλήσθω ἡ BA ἐπὶ τὸ H. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΔX τῇ XZ, ἴση ἄρα καὶ ἡ EX τῇ ZH· ὥστε καὶ ἡ ΓH ἴση τῇ ZH. ἡ ἄρα κατὰ τὸ A ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΓZ· ὥστε καὶ τῇ EX. αἱ EX, AB ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.

λη'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύωσι συμπίπτουσαι, ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ἐπιζευγνυμένη ἐπὶ

que HK diametrus oppositarum non est. ergo $H\Theta$ diametrus est.

XXXVII.

Si recta non per centrum ducta oppositas secat, recta a puncto eius medio ad centrum ducta diametrus est oppositarum, recta quae uocatur, transuersa autem cum ea coniugata recta est a centro ducta rectae in duas partes aequales sectae parallela.

sint A, B sectiones oppositae, sectionesque A, B secet recta $\Gamma\Delta$ non per centrum ducta et in E in duas partes aequales secetur, centrum autem sectionum sit X, ducaturque XE, et per X rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur AB. dico, AB et EX diametros coniugatas esse sectionum.

ducatur enim ΔX et ad Z producatur, ducaturque ΓZ. itaque $\Delta X = XZ$ [I, 30]. uerum etiam $\Delta E = E\Gamma$; itaque EX et $Z\Gamma$ parallelae sunt [Eucl. VI, 2]. producatur $B A$ ad H. et quoniam est $\Delta X = XZ$, erit etiam $EX = ZH$ [Eucl. VI, 4; V, 14]; quare etiam $\Gamma H = ZH$ [Eucl. I, 34]. itaque recta in A contingens rectae ΓZ parallela est [prop. V]; quare etiam rectae EX parallela est [Eucl. I, 30]. ergo EX, AB diametri coniugatae sunt [I, 16].

XXXVIII.

Si duae rectae concurrentes oppositas contingunt, recta a puncto concursus ad mediam rectam puncta contactus coniungentem ducta diametrus erit oppositarum, recta quae uocatur, transuersa autem cum ea μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν διάμετρος ἔσται τῶν ἀντικειμένων ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου ἀγομένη παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ τῶν τομῶν αἱ ΓΧ, ΧΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΧ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΧ διάμετρός ἐστιν ἡ λεγομένη ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη.

ἔστω γάρ, εἰ δυνατόν, διάμετρος ἡ ΕΖ, καὶ εἰλήφθω τυχὸν σημεῖον τὸ Ζ· συμπεσεῖται ἄρα ἡ ΔΧ τῇ ΕΖ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΖ· συμβαλεῖ ἄρα ἡ ΓΖ τῇ τομῇ. συμβαλέτω κατὰ τὸ Α, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΒ. ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΕΖ, καὶ τὴν ΓΔ δίχα τέμνει, καὶ τὰς παραλλήλους αὐτῇ δίχα τέμνει. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΕ τῇ ΕΔ, καί ἐστιν ἐν τριγώνῳ τῷ ΓΖΔ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΚ. ὥστε καὶ ἡ ΗΚ τῇ ΗΒ ἐστιν ἴση· ὅπερ ἀδύνατον. οὐκ ἄρα ἡ ΕΖ διάμετρος ἔσται.

λθ'.

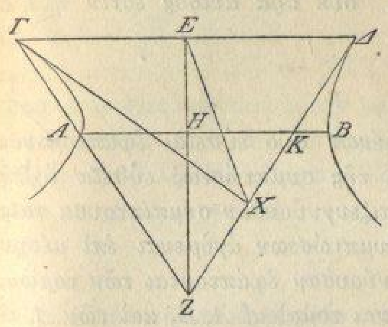
Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφάπτωνται συμπίπτουσαι, ἡ διὰ τοῖ κέντρου καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀγομένη δίχα τέμνει τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν εὐθεῖαν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ

14. ΓΖ] cp, corr. ex ΓΔ V, sed obscure. 19. ΓΖΔ] ΖΔ V; corr. p.

coniugata recta erit per centrum ducta rectae puncta contactus coniungenti parallela.

sint A, B sectiones oppositae, sectionesque contingant ΓX, $X\Delta$, et ducatur $\Gamma\Delta$ seceturque in duas partes aequales in E, et ducatur EX. dico, EX diametrum esse, recta quae uocatur, transuersam autem cum ea coniugatam rectam per centrum rectae $\Gamma\Delta$ parallelam ductam.



sit enim, si fieri potest, EZ diametrus, et sumatur punctum aliquod Z; ΔX igitur cum EZ concurret. concurrat in Z, ducaturque ΓZ; ΓZ igitur cum sectione concurret [I, 32]. concurrat in A, et per A rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur AB. iam quoniam EZ diametrus est et rectam $\Gamma\Delta$ in duas partes aequales secat, etiam rectas ei parallelas in binas partes aequales secat [I def. 4]. itaque $AH = HB$. et quoniam est $\Gamma E = E\Delta$, et in triangulo sunt $\Gamma Z\Delta$, erit etiam $AH = HK$ [Eucl. VI, 4]. quare etiam $HK = HB$; quod fieri non potest. ergo EZ diametrus non erit.

XXXIX.

Si duae rectae concurrentes oppositas contingunt, recta per centrum punctumque concursus contingentium ducta rectam puncta contactus coniungentem in duas partes aequales secat.

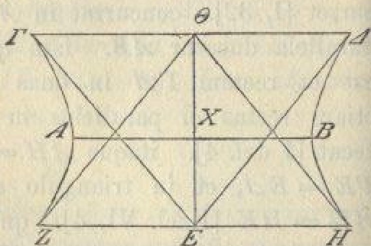
ἐπεξεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διάμετρος ἤχθω ἡ ΕΖ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ.

εἰ γὰρ μή, τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Η, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΗΕ· ἡ ΗΕ ἄρα διάμετρός ἐστιν. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΖ· κέντρον ἄρα ἐστὶ τὸ Ε. ἡ ἄρα σύμπτωσις τῶν ἐφαπτομένων ἐπὶ τοῦ κέντρου ἐστὶ τῶν τομῶν· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἄνισός ἐστιν ἡ ΓΖ τῇ ΖΔ. ἴση ἄρα.

μ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως εὐθεῖα ἀχθῇ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ταῖς τομαῖς, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι ἐπὶ μέσην τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἐφάπτονται τῶν τομῶν.

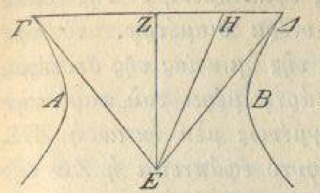
ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, καὶ τῶν Α, Β δύο εὐθεῖαι ἤχθωσαν ἐφαπτόμεναι αἱ ΓΕ, ΕΔ, καὶ ἐπεξεύχθω ἡ ΓΔ, καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΓΔ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΕΗ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΘ, ΘΗ. λέγω, ὅτι αἱ ΖΘ, ΘΗ ἐφάπτονται τῶν τομῶν.



ἐπεζεύχθω ἡ ΕΘ· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ ΕΘ ὀρθία, πλαγία δὲ συζυγὴς αὐτῇ ἡ διὰ τοῦ κέντρου τῇ ΓΔ παράλληλος ἀγομένη. εἰλήφθω τὸ κέντρον τὸ Χ, καὶ

4. ἡ ΗΕ] om. V; corr. p. 7. οὐκ ἄρα ἄνισός] addidi; om. V. 14. ἐφάπτωνται V; corr. pc. 24. ἐφάπτωνται V; infra ω macula est (o?); corr. p.

sint A, B sectiones oppositae, sectionesque A, B contingentes duae rectae ducantur ΓE, $E\varDelta$, ducaturque $\Gamma\varDelta$, et diametrus ducatur EZ. dico, esse $\Gamma Z = Z\varDelta$.



nam si minus, $\Gamma\varDelta$ in H in duas partes aequales secetur, ducaturque HE; HE igitur diametrus est [prop. XXXVIII]. uerum etiam EZ diametrus est; centrum igitur est E. itaque concursus contingentium in centro est sectionum; quod absurdum est [prop. XXXII]. itaque ΓZ, $Z\varDelta$ inaequales non sunt. ergo $\Gamma Z = Z\varDelta$.

XL.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et per punctum concursus recta ducitur rectae puncta contactus coniungenti parallela cum sectionibus concurrens, rectae a punctis concursus ad mediam rectam puncta contactus coniungentem ductae sectiones contingunt.

sint A, B sectiones oppositae, ducanturque duae rectae sectiones A, B contingentes ΓE, $E\varDelta$, et ducatur $\Gamma\varDelta$, per E autem rectae $\Gamma\varDelta$ parallela ducatur ZEH, et $\Gamma\varDelta$ in Θ in duas partes aequales secetur, ducanturque $Z\Theta$, ΘH. dico, rectas $Z\Theta$, ΘH sectiones contingere.

ducatur $E\Theta$; $E\Theta$ igitur diametrus est recta, transuersa autem cum ea coniugata recta est per centrum rectae $\Gamma\varDelta$ parallela ducta [prop. XXXVIII]. sumatur centrum X, et rectae $\Gamma\varDelta$ parallela ducatur AXB. itaque ΘE, τῇ $\Gamma\varDelta$ παράλληλος ἤχθω ἡ AXB· αἱ ΘE, AB ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. καὶ τεταγμένως ἦκται ἡ $\Gamma\Theta$ ἐπὶ τὴν δευτέραν διάμετρον, ἐφαπτομένη δὲ τῆς τομῆς ἡ ΓE συμπίπτουσα τῇ δευτέρᾳ διαμέτρῳ. τὸ ἄρα ὑπὸ $EX\Theta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ παρὰ τὴν AB εἴδους. καὶ ἐπεὶ τεταγμένως μὲν ἦκται ἡ ZE, ἐπέζευκται δὲ ἡ $Z\Theta$, διὰ τουτο ἐφάπτεται ἡ $Z\Theta$ τῆς A τομῆς. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ $H\Theta$ ἐφάπτεται τῆς B τομῆς. αἱ $Z\Theta$, ΘH ἄρα ἐφάπτονται τῶν A, B τομῶν.

μα'.

Ἐὰν ἐν ταῖς ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ A, B, καὶ ἐν ταῖς A, B δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΓB, $A\varDelta$ κατὰ τὸ E μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ τὸ κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ EX· διάμετρος ἄρα ἐστὶν ἡ EX. ἤχθω διὰ τοῦ X τῇ $B\Gamma$ παράλληλος ἡ XZ· ἡ XZ ἄρα διάμετρός ἐστι καὶ συζυγὴς τῇ EX. ἡ ἄρα κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EX. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ παραλλήλου ἀχθείσης τῆς ΘK τῇ $A\varDelta$ ἡ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ EX· ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ κατὰ τὸ Θ ἐφαπτομένῃ· ὅπερ ἄτοπον· ἐδείχθη γὰρ καὶ συμ-

1. AXB] XAB V; corr. p. 7. ἐπεί] p, ἐπί V. 16. ἀλλήλαις V; corr. p.

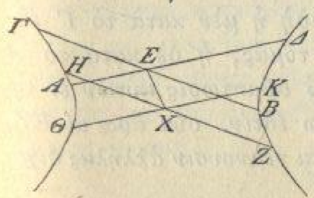
AB diametri sunt coniugatae. et $\Gamma\Theta$ ad diametrum secundam ordinate ducta est, sectionem contingens autem ΓE cum secunda diametro concurrens; itaque [I, 38] rectangulum $EX \times X\Theta$ aequale est quadrato dimidiae secundae diametri, hoc est quartae parti figurae ad AB adplicatae [I def. alt. 3]. et quoniam ZE ordinate ducta est, et ducta est $Z\Theta$, propterea $Z\Theta$ sectionem A contingit [I, 38]. eadem de causa etiam $H\Theta$ sectionem B contingit. ergo $Z\Theta$, ΘH sectiones A, B contingunt.

XLI.

Si in oppositis duae rectae inter se secant non per centrum ductae, in binas partes aequales inter se non secant.

sint A, B sectiones oppositae, et in A, B duae rectae ΓB, $A\varDelta$ non per centrum ductae in E inter se secent. dico, eas in binas partes aequales inter se non secare.

nam si fieri potest, secent, centrum autem sectionum sit X, et ducatur EX; EX igitur diametrus est [prop. XXXVII]. ducatur per X rectae $B\Gamma$ parallela XZ; XZ igitur diametrus est et cum EX coniugata [ibid.]. itaque recta in Z contingens rectae EX parallela est [I def. 6]. iam eadem de causa ducta ΘK rectae $A\varDelta$ parallela recta in Θ contingens rectae EX parallela est; quare etiam recta in Z contingens rectae in Θ contingenti parallela est [Eucl. I, 30];

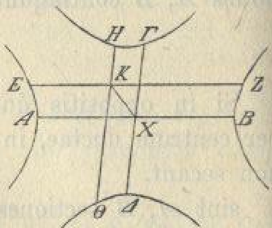


πίπτουσα. οὐκ ἄρα αἱ ΓΒ, ΑΔ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσι ἀλλήλας δίχα.

μβ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τέμνωσιν ἀλλήλας μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι, οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ ἐν ταῖς Α, Β, Γ, Δ τομαῖς δύο εὐθεῖαι τεμνέτωσαν ἀλλήλας αἱ ΕΖ, ΗΘ κατὰ τὸ Κ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι. λέγω, ὅτι οὐ τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.



εἰ γὰρ δυνατόν, τεμνέτωσαν, καὶ το κέντρον τῶν τομῶν ἔστω τὸ Χ, καὶ τῇ μὲν ΕΖ ἤχθω παράλληλος ἡ ΑΒ, τῇ δὲ ΘΗ ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΧ· αἱ ΚΧ, ΑΒ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὁμοίως καὶ αἱ ΧΚ, ΓΔ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι. ὥστε καὶ ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη τῇ κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένῃ παράλληλός ἐστιν· ὅπερ ἀδύνατον· συμπίπτει γάρ, ἐπειδὴ ἡ μὲν κατὰ τὸ Γ ἐφαπτομένη τέμνει τὰς Α, Β τομάς, ἡ δὲ κατὰ τὸ Α τὰς Δ, Γ, καὶ φανερόν, ὅτι ἡ σύμπτωσις αὐτῶν ἐν τῷ ὑπὸ τὴν ΑΧΓ γωνίαν τόπῳ ἐστίν. οὐκ ἄρα αἱ ΕΖ, ΗΘ μὴ διὰ τοῦ κέντρου οὖσαι τέμνουσιν ἀλλήλας δίχα.

μγ'.

Ἐὰν μίαν τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖα τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα, διὰ δὲ τοῦ κέντρου ἡ μὲν

10. τό] τοῦ V; corr. p. 25. δίχα] om. V; corr. p.

quod absurdum est; nam demonstrauimus [prop. XXXI], easdem concurrere. ergo ΓB, $A\Delta$ per centrum non ductae in binas partes aequales inter se non secant.

XLII.

Si in oppositis coniugatis duae rectae inter se secant non per centrum ductae, in binas partes aequales inter se non secant.

sint A, B, Γ, Δ sectiones oppositae coniugatae, et in sectionibus A, B, Γ, Δ duae rectae EZ, $H\Theta$ non per centrum ductae in K inter se secent. dico, eas in binas partes aequales inter se non secare.

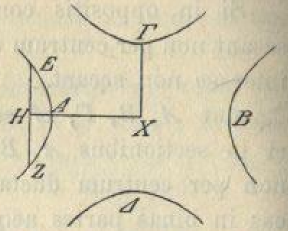
nam si fieri potest, secent, centrum autem sectionum sit X, et ducatur rectae EZ parallela AB, rectae ΘH autem parallela $\Gamma\Delta$, ducaturque KX; KX et AB igitur diametri sunt coniugatae [prop. XXXVII]. eadem de causa etiam XK et $\Gamma\Delta$ diametri sunt coniugatae. quare etiam recta in A contingens rectae in Γ contingenti parallela est [I def. 6; Eucl. I, 30]; quod fieri non potest; concurrunt enim, quoniam recta in Γ contingens sectiones A, B secat, recta autem in A contingens sectiones Δ, Γ [prop. XIX], et manifestum est, punctum concursus earum in spatio sub angulo $AX\Gamma$ posito esse [prop. XXI]. ergo EZ, $H\Theta$ non per centrum ductae in binas partes aequales inter se non secant.

XLIII.

Si recta unam oppositarum coniugatarum in duobus punctis secat, per centrum autem recta ad mediam secantem ducitur, alia autem secanti parallela, hae diametri coniugatae oppositarum erunt.

ἐπὶ μέσην τὴν τέμνουσαν ἀχθῇ, ἡ δὲ παρὰ τὴν τέμνουσαν, συζυγεῖς ἔσονται διάμετροι τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι τομαὶ αἱ Α, Β, Γ, Δ, καὶ τεμνέτω τὴν Α εὐθεῖά τις κατὰ δύο σημεῖα τὰ Ε, Ζ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΕ τῷ Η, καὶ ἔστω κέντρον τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΧΗ, παράλληλος δὲ ἤχθω τῇ ΕΖ ἡ ΓΧ. λέγω, ὅτι αἱ ΑΧ, ΧΓ συζυγεῖς εἰσι διάμετροι.



ἐπεὶ γὰρ διάμετρος ἡ ΑΧ, καὶ τὴν ΕΖ δίχα τέμνει, ἡ κατὰ τὸ Α ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ ΕΖ· ὥστε καὶ τῇ ΓΧ. ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναί εἰσι τομαί, καὶ μιᾶς αὐτῶν τῆς Α ἦκται ἐφαπτομένη κατὰ τὸ Α, ἀπὸ δὲ τοῦ κέντρου τοῦ Χ ἡ μὲν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἐπιζεύγνυται ἡ ΧΑ, ἡ δὲ παρὰ τὴν ἐφαπτομένην ἦκται ἡ ΓΧ, αἱ ΧΑ, ΓΧ ἄρα συζυγεῖς εἰσι διάμετροι· τοῦτο γὰρ προδέδεικται.

μδ΄.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα. δεῖ δὴ αὐτῆς τὴν διάμετρον εὑρεῖν.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΘ. ἀχθεισῶν δὴ τεταγμένως τῶν ΔΖ, ΕΘ καὶ ἐκβληθεισῶν ἔσται ἴση ἡ μὲν ΔΖ τῇ ΖΒ, ἡ δὲ ΕΘ τῇ ΘΑ. ἐὰν οὖν τάξωμεν τὰς ΒΔ, ΕΑ θέσει οὔσας παραλλήλους, ἔσται δοθέντα τὰ Θ, Ζ σημεῖα. ὥστε θέσει ἔσται ἡ ΘΖΓ.

6. ἔστω] τό V; corr. p (ἔστω τῶν τομῶν τό). 18. ΧΑ] ΓΑ V; corr. Halley; ΑΧ p, Comm. 22. Ε] om. V; corr. Comm.

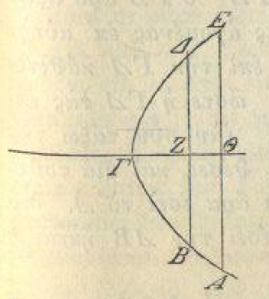
sint Α, Β, Γ, Δ sectiones oppositae coniugatae, et recta aliqua sectionem Α in duobus punctis Ε, Ζ secet, seceturque ΕΖ in Η in duas partes aequales, centrum autem sit Χ, et ducatur ΧΗ, rectae autem ΕΖ parallela ducatur ΓΧ. dico, rectas ΑΧ, ΧΓ diametros coniugatas esse.

nam quoniam ΑΧ diametrus est et rectam ΕΖ in duas partes aequales secat, recta in Α contingens rectae ΕΖ parallela est [prop. V]; quare etiam rectae ΓΧ [Eucl. I, 30]. quoniam igitur sectiones oppositae sunt, et unam earum Α in Α contingens ducta est recta, a centro autem Χ ad punctum contactus ducta est ΧΑ, contingenti autem parallela ducta est ΓΧ, rectae ΧΑ, ΓΧ diametri coniugatae sunt; hoc enim antea demonstratum est [prop. XX].

XLIV.

Datae coni sectionis diametrum inuenire.

sit data sectio coni, in qua sunt puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε. oportet igitur diametrum eius inuenire.



factum sit, sitque ΓΘ. itaque rectis ΔΖ, ΕΘ ordinate ductis productisque erit ΔΖ = ΖΒ, ΕΘ = ΘΑ [I def. 4]. itaque si rectas ΒΔ, ΕΑ, quae parallelae sunt, positione fixerimus, data erunt puncta Θ, Ζ. ergo ΘΖΓ positione data erit.

componetur hoc modo: sit data coni sectio, in qua sunt puncta Α, Β, Γ, Δ, Ε, et parallelae ducantur rectae ΒΔ, ΑΕ secenturque συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομή, ἐφ' ἧς τὰ Α, Β, Γ, Δ, Ε σημεῖα, καὶ ἤχθωσαν παράλληλοι αἱ ΒΔ, ΑΕ καὶ τετμήσθωσαν δίχα κατὰ τὰ Ζ, Θ. καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΖΘ διάμετρος ἔσται τῆς τομῆς. τῷ δὲ αὐτῷ τρόπῳ καὶ ἀπείρους εὑρήσομεν διαμέτρους.

με'.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἢ ὑπερβολῆς τὸ κέντρον εὑρεῖν.

τοῦτο δὲ φανερόν· ἐὰν γὰρ διαχθῶσι δύο διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΑΒ, ΓΔ, καθ' ὃ τέμνουσιν ἀλλήλας, ἔσται τῆς τομῆς τὸ κέντρον, ὡς ὑπόκειται.

μϛ'.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἐφ' ἧς τὰ Ζ, Γ, Ε. δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἤχθω γὰρ αὐτῆς διάμετρος ἡ ΑΒ. εἰ μὲν οὖν ἡ ΑΒ ἄξων ἐστί, γεγονὸς ἂν εἴη τὸ ἐπιταχθέν· εἰ δὲ οὔ, γεγονέτω, καὶ ἔστω ἄξων ὁ ΓΔ· ὁ ΓΔ ἄρα ἄξων παράλληλός ἐστι τῇ ΑΒ καὶ τὰς ἀγομένας ἐπ' αὐτὴν καθέτους δίχα τέμνει. αἱ δὲ ἐπὶ τὴν ΓΔ κάθετοι καὶ ἐπὶ τὴν ΑΒ κάθετοί εἰσιν· ὥστε ἡ ΓΔ τὰς ἐπὶ τὴν ΑΒ καθέτους δίχα τέμνει. ἐὰν οὖν τάξω τὴν ΕΖ κάθετον ἐπὶ τὴν ΑΒ, ἔσται θέσει, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ΕΔ τῇ ΔΖ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Δ. διὰ δεδομένου ἄρα τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΑΒ ἦκται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα παρα-

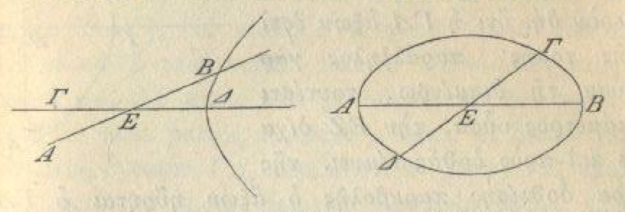
28. δή] δέ Halley.

in binas partes aequales in Z, Θ. et ducta $Z\Theta$ diametrus sectionis erit [I def. 4]. eodem autem modo etiam innumerabiles diametros inueniemus.

XLV.

Datae ellipsis uel hyperbolae centrum inuenire.

hoc autem manifestum est. nam si duae diametri



sectionis ducuntur AB, $\Gamma\Delta$ [prop. XLIV], ubi inter se secant, centrum erit sectionis, ut infra descriptum est.

XLVI.

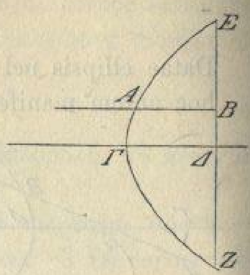
Datae coni sectionis axem inuenire.

sit data coni sectio prius parabola, in qua sunt Z, Γ, E. oportet igitur axem eius inuenire.

ducatur enim diametrus eius AB [prop. XLIV]. iam si AB axis est, factum erit propositum; sin minus, factum sit, et axis sit $\Gamma\Delta$; axis igitur $\Gamma\Delta$ rectae AB parallela est [I, 51 coroll.] et rectas ad eam perpendiculares ductas in binas partes aequales secat [I def. 7]. rectae autem ad $\Gamma\Delta$ perpendiculares etiam ad AB perpendiculares sunt; quare $\Gamma\Delta$ rectas ad AB perpendiculares in binas partes aequales secat. iam si fixero EZ ad AB perpendicularem, positione data

Figuras prop. XLV in prop. XLIV habet V; in prop. XLV mg. ἐγράφη τὸ σχῆμα ἄνω m. 1.

βολή, ἐφ᾽ ἧς τὰ Z, E, A, καὶ ἤχθω αὐτῆς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἐπ᾽ αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ BE καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Z. εἰ μὲν οὖν ἴση ἐστὶν ἡ EB τῇ BZ, φανερόν, ὅτι ἡ AB ἄξων ἐστίν· εἰ δὲ οὔ, τετμήσθω ἡ EZ δίχα τῷ Δ, καὶ τῇ AB παράλληλος ἤχθω ἡ $\Gamma\Delta$. φανερὸν δή, ὅτι ἡ $\Gamma\Delta$ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς· παράλληλος γὰρ οὖσα τῇ διαμέτρῳ, τουτέστι διάμετρος οὖσα, τὴν EZ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. τῆς ἄρα δοθείσης παραβολῆς ὁ ἄξων ηὕρηται ὁ $\Gamma\Delta$.



καὶ φανερόν, ὅτι εἷς ἄξων ἐστὶ τῆς παραβολῆς. εἰ γὰρ ἄλλος ἔσται ὡς ὁ AB, ἔσται τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος. καὶ τὴν EZ τέμνει· ὥστε καὶ δίχα. ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ BE τῇ BZ· ὅπερ ἄτοπον.

μζ΄.

Τῆς δοθείσης ὑπερβολῆς ἢ ἐλλείψεως τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

ἔστω ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ $AB\Gamma$· δεῖ δὴ αὐτῆς τὸν ἄξονα εὑρεῖν.

εὑρήσθω καὶ ἔστω ὁ $K\Delta$, κέντρον δὲ τῆς τομῆς τὸ K· ἡ ἄρα $K\Delta$ τὰς ἐπ᾽ αὐτὴν τεταγμένως καταγομένας δίχα καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει.

ἤχθω κάθετος ἡ $\Gamma\Delta A$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ KA, $K\Gamma$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ $\Gamma\Delta$ τῇ ΔA, ἴση ἄρα ἡ ΓK τῇ KA.

3. ἐπί] om. V; corr. p. 13. εὕρηται cp. 21. ἔλλειψις] c, ἔλειψις, supra scr. λ m. 1, V. 23. $K\Delta$] $A\Delta$ V; corr. p. 26. KA] $K\Delta$ V; corr. p.

erit [Eucl. dat. 30], et ob causam, quam indicauimus, erit $E\Delta = \Delta Z$. quare Δ datum est. per datum igitur punctum Δ rectae AB positione datae parallela ducta est $\Gamma\Delta$; ergo $\Gamma\Delta$ positione data est [Eucl. dat. 28].

componetur hoc modo: sit data parabola, in qua sunt puncta Z, E, A, et eius diametrus ducatur AB [prop. XLIV], ad eamque perpendicularis ducatur BE et ad Z producatur. iam si $EB = BZ$, manifestum est, AB axem esse [I def. 7]; sin minus, EZ in Δ in duas partes aequales secetur, et rectae AB parallela ducatur $\Gamma\Delta$. manifestum igitur, $\Gamma\Delta$ axem esse sectionis. nam diametro parallela ducta, h. e. ipsa diametrus [I, 51 coroll.], rectam EZ et in duas partes aequales et ad angulos rectos secat [I def. 7]. ergo datae parabolae axis inuentus est $\Gamma\Delta$.

et manifestum est, unum solum axem esse parabolae. nam si alius quoque erit ut AB, rectae $\Gamma\Delta$ parallela erit [I, 51 coroll.]. et rectam EZ secat; quare etiam in duas partes aequales eam secat [I def. 4]. itaque $BE = BZ$; quod absurdum est.

XLVII.

Datae hyperbolae uel ellipsis axem inuenire.

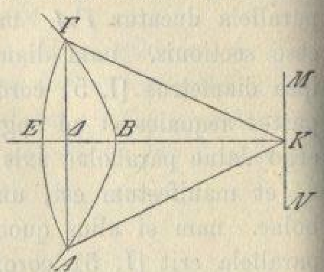
sit $AB\Gamma$ hyperbola uel ellipsis. oportet igitur axem eius inuenire.

inuentus sit et sit $K\Delta$, centrum autem sectionis sit K; itaque $K\Delta$ rectas ad eam ordinate ductas in binas partes aequales et ad angulos rectos secat [I def. 7].

ducatur perpendicularis $\Gamma\Delta A$, ducanturque KA, $K\Gamma$. iam quoniam est $\Gamma\Delta = \Delta A$, erit etiam $\Gamma K = KA$

ἐὰν οὖν τάξωμεν δοθὲν τὸ Γ, ἔσται δοθεῖσα ἡ ΓΚ. ὥστε ὁ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γραφόμενος ἥξει καὶ διὰ τοῦ Α καὶ ἔσται θέσει δεδομένος. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΒΓ τομὴ δοθεῖσα θέσει· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἔστι δὲ καὶ τὸ Γ δοθέν· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΓΔ τῇ ΔΑ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα τῇ θέσει ἡ ΔΚ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἢ ἔλλειψις ἡ ΑΒΓ, καὶ εἰλήφθω αὐτῆς κέντρον τὸ Κ· εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ κέντρῳ τῷ Κ, διαστήματι δὲ τῷ ΚΓ κύκλος γεγράφθω ὁ ΓΕΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΑ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, καὶ διήχθω ἡ ΚΔ ἐπὶ τὸ Β.



ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΓ, κοινὴ δὲ ἡ ΔΚ, δύο ἄρα αἱ ΓΔΚ δύο ταῖς ΑΔΚ ἴσαι εἰσί, καὶ βάσις ἡ ΚΑ τῇ ΚΓ ἴση. ἡ ἄρα ΚΒΔ τὴν ΑΔΓ δίχα τε καὶ πρὸς ὀρθὰς τέμνει. ἄξων ἄρα ἐστὶν ἡ ΚΔ.

ἤχθω διὰ τοῦ Κ τῇ ΓΑ παράλληλος ἡ ΜΚΝ· ἡ ἄρα ΜΝ ἄξων ἐστὶ τῆς τομῆς συζυγὴς τῇ ΒΚ.

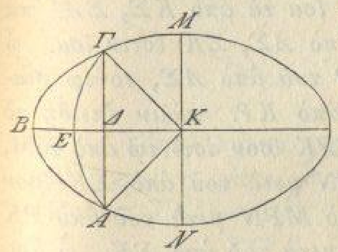
μη'.

Δεδειγμένων δὴ τούτων ἑξῆς ἔστω δεῖξαι, ὅτι ἄλλοι ἄξονες τῶν αὐτῶν τομῶν οὐκ εἰσίν.

7. δοθεῖσα] om. V; corr. p (δοθέν om.). 9. δή] p, δέ V. 17. ΚΔ] καί V; corr. p; del. Halley.

[Eucl. I, 4]. iam si Γ punctum datum fixerimus, data erit ΓΚ [Eucl. dat. 26]. quare circulus centro Κ, radio autem ΚΓ descriptus etiam per Α ueniet et positione datus erit [dat. def. 6]. uerum etiam sectio ΑΒΓ positione data est. itaque Α datum est [dat. 25]. uerum etiam Γ datum est; itaque ΓΑ positione data est [dat. 26]. et ΓΔ = ΔΑ; itaque Δ datum est [dat. 7]. uerum etiam Κ datum est. ergo ΔΚ positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: sit data hyperbola uel ellipsis ΑΒΓ, et sumatur centrum eius Κ [prop. XLV]; sumatur autem in sectione punctum aliquod Γ, et centro Κ, radio autem ΚΓ circulus describatur ΓΕΑ, ducaturque ΓΑ et in Δ in duas partes aequales secetur, ducanturque ΚΓ, ΚΔ, ΚΑ, et ΚΔ ad Β producatur.



iam quoniam est ΑΔ = ΔΓ, et communis ΔΚ, erunt duae rectae ΓΔ, ΔΚ duabus ΑΔ, ΔΚ aequales, et basis ΚΑ basi ΚΓ aequalis [Eucl. I, 4]. itaque ΚΒΔ rectam ΑΔΓ et in duas partes aequales et ad rectos angulos secat. ergo ΚΔ axis est [I def. 7].

ducatur per Κ rectae ΓΑ parallela ΜΚΝ; itaque ΜΝ axis sectionis est cum ΒΚ coniugatus [I def. 8].

XLVIII.

Iam his demonstratis deinde sit demonstrandum, alios axes earundem sectionum non esse.

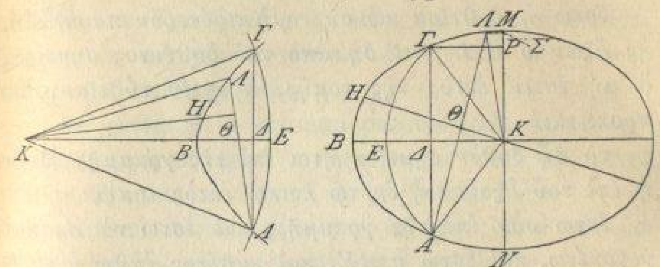
εἰ γὰρ δυνατόν, ἔστω καὶ ἕτερος ἄξων ὁ ΚΗ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ τοῖς ἔμπροσθεν ἀχθείσης καθέτου τῆς ΑΘ ἴση ἔσται ἡ ΑΘ τῇ ΘΛ· ὥστε καὶ ἡ ΑΚ τῇ ΚΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ ΚΓ· ἴση ἄρα ἡ ΚΛ τῇ ΚΓ· ὅπερ ἄτοπον.

ὅτι μὲν οὖν καὶ ὁ ΑΕΓ κύκλος κατ' ἄλλο σημεῖον μεταξὺ τῶν Α, Β, Γ οὐ συμβάλλει τῇ τομῇ, ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς φανερόν· ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως κάθετοι ἤχθωσαν αἱ ΓΡ, ΛΣ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΚΓ τῇ ΚΛ· ἐκ κέντρου γάρ· ἴσον ἐστὶ καὶ τὸ ἀπὸ ΓΚ τῷ ἀπὸ ΚΛ. ἀλλὰ τῷ μὲν ἀπὸ ΓΚ ἴσα ἐστὶ τὰ ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ, τῷ δὲ ἀπὸ ΛΚ ἴσα τὰ ἀπὸ ΚΣ, ΣΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΓΡ, ΡΚ τοῖς ἀπὸ ΛΣ, ΣΚ ἐστιν ἴσα. ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ. πάλιν ἐπειδὴ τὸ ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΜ, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ ἴσον τῷ ἀπὸ ΚΜ, τὸ ἄρα ὑπὸ ΜΡΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΣΝ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΣΚ. ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δέ, ὅτι, ᾧ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΣΚ τοῦ ἀπὸ ΚΡ, τούτῳ διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΛΣ· ᾧ ἄρα διαφέρει τὸ ἀπὸ ΓΡ τοῦ ἀπὸ ΣΛ, τούτῳ διαφέρει τὸ ὑπὸ ΜΡΝ τοῦ ὑπὸ ΜΣΝ. καὶ ἐπεὶ κατηγμέναι εἰσὶν αἱ ΓΡ, ΛΣ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΡ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΡΝ, τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΣΝ. ἐδείχθη δὲ καὶ ἐν ἀμφοτέροις ἡ αὐτὴ ὑπεροχή· ἴσον ἄρα τὸ μὲν ἀπὸ ΓΡ τῷ ὑπὸ

2. τά] bis V; corr. cvp. 10. καί] pv, om. c, supra scr. m. 1 V. 11. τῷ] (alt.) pc, corr. ex τό m. 1 V. 18. τῷ] pc, corr. ex τό m. 1 V.

nam si fieri potest, etiam alius axis sit KH. eodem igitur modo, quo antea, ducta perpendiculari $A\Theta$ erit $A\Theta = \Theta\Lambda$ [I def. 4]; quare etiam $AK = K\Lambda$ [Eucl. I, 4]. uerum etiam $AK = K\Gamma$ [ibid.]. itaque etiam $K\Lambda = K\Gamma$; quod absurdum est.

iam circulum $AE\Gamma$ in alio puncto inter A, B, Γ cum sectione non concurrere, in hyperbola manifestum



est; in ellipsi autem perpendiculares ducantur ΓP, $\Lambda\Sigma$. quoniam igitur est $K\Gamma = K\Lambda$ (nam radii sunt), est etiam $\Gamma K^2 = K\Lambda^2$. est autem

$$\Gamma P^2 + PK^2 = \Gamma K^2$$

et $K\Sigma^2 + \Sigma\Lambda^2 = \Lambda K^2$ [Eucl. I, 47]. itaque

$$\Gamma P^2 + PK^2 = \Lambda\Sigma^2 + \Sigma K^2.$$

quare $\Gamma P^2 \div \Lambda\Sigma^2 = \Sigma K^2 \div KP^2$. rursus quoniam est $MP \times PN + PK^2 = KM^2$ [Eucl. II, 5], et etiam $M\Sigma \times \Sigma N + \Sigma K^2 = KM^2$ [ibid.], erit

$$MP \times PN + PK^2 = M\Sigma \times \Sigma N + \Sigma K^2.$$

itaque $\Sigma K^2 \div KP^2 = MP \times PN \div M\Sigma \times \Sigma N$. demonstrauimus autem, esse

$$\Sigma K^2 \div KP^2 = \Gamma P^2 \div \Lambda\Sigma^2;$$

itaque $\Gamma P^2 \div \Sigma\Lambda^2 = MP \times PN \div M\Sigma \times \Sigma N$. et quoniam ΓP, $\Lambda\Sigma$ ordinate ductae sunt, erit

$$\Gamma P^2 : MP \times PN = \Lambda\Sigma^2 : M\Sigma \times \Sigma N \text{ [I, 21];}$$

ΜΡΝ, τὸ δὲ ἀπὸ *ΑΣ* τῷ ὑπὸ *ΜΣΝ*. κύκλος ἄρα ἐστὶν ἡ *ΑΓΜ* γραμμή· ὅπερ ἄτοπον· ὑπόκειται γὰρ ἔλλειψις.

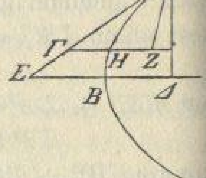
μθ'.

Κώνου τομῆς δοθείσης καὶ σημείου μὴ ἐντὸς τῆς τομῆς ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ σημείου εὐθεῖαν καθ' ἓν ἐπιψαύουσαν τῆς τομῆς.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ *ΒΔ*. δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ δοθέντος σημείου, ὅ μή ἐστιν ἐντὸς τῆς τομῆς, ἀγαγεῖν εὐθεῖαν, ὡς πρόκειται.

τὸ δὴ δοθὲν σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς γραμμῆς ἐστιν ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐν τῷ λοιπῷ ἐκτὸς τόπῳ.

ἔστω οὖν ἐπὶ τῆς γραμμῆς, καὶ ἔστω τὸ *Α*, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ *ΑΕ*, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ *ΑΔ*· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἴση ἐστὶν ἡ *ΒΕ* τῇ *ΒΔ*· καί ἐστι δοθεῖσα ἡ *ΒΔ*· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ *ΒΕ*. καί ἐστι τὸ *Β* δοθέν· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ *Ε*. ἀλλὰ καὶ τὸ *Α*· θέσει ἄρα ἡ *ΑΕ*.



συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἤχθω ἀπὸ τοῦ *Α* κάθετος ἡ *ΑΔ*, καὶ κείσθω τῇ *ΒΔ* ἴση ἡ *ΒΕ*, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ *ΑΕ*. φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ἔστω πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ *Ε*, καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ *ΑΕ*, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ *ΑΔ*· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ *ΒΕ* τῇ *ΒΔ*. καὶ δοθεῖσα ἡ *ΒΕ*· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ *ΒΔ*. καί ἐστι δοθὲν τὸ *Β*· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ *Δ*. καί ἐστιν ὀρθὴ

---

17. *ΒΔ*] (alt.) p, corr. ex *ΓΔ* m. 2 V; *ΓΔ* cv.

demonstrauimus autem, in utrisque etiam eandem differentiam esse; itaque erit [Eucl. V, 16, 17, 9] $\Gamma P^2 = M P \times P N$, $A\Sigma^2 = M\Sigma \times \Sigma N$. itaque linea *ΑΓΜ* circulus est [Eutocius ad I, 5]; quod absurdum est; supposuimus enim, ellipsim eam esse.

XLIX.

Data coni sectione et puncto non intra sectionem posito ab hoc puncto rectam ducere in uno puncto sectionem contingentem.

data sectio coni primum parabola sit, cuius axis sit *ΒΔ*. oportet igitur a dato puncto intra sectionem non posito rectam ducere, ut propositum est.

punctum datum igitur aut in ipsa linea est aut in axe aut in reliquo spatio extra posito.

sit positum in linea ipsa sitque *Α*, et factum sit, sitque *ΑΕ*, et ducatur perpendicularis *ΑΔ*; positione igitur data erit [Eucl. dat. 30]. est autem *ΒΕ* = *ΒΔ* [I, 35]; et *ΒΔ* data est; itaque etiam *ΒΕ* data est. et *Β* datum est; itaque etiam *Ε* datum est [dat. 27]. uerum etiam *Α* datum est; itaque *ΑΕ* positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: ab *Α* perpendicularis ducatur *ΑΔ*, et ponatur *ΒΕ* = *ΒΔ*, ducaturque *ΑΕ*. manifestum igitur, eam sectionem contingere [I, 35].

rursus datum punctum in axe sit *Ε*, et factum sit, et *ΑΕ* contingens ducta sit, et perpendicularis ducatur *ΑΔ*. itaque *ΒΕ* = *ΒΔ* [I, 35]. et data est *ΒΕ* [dat. 26]; itaque etiam *ΒΔ* data est. et *Β* datum est; itaque etiam *Δ* datum est [dat. 27]. et *ΔΑ* perpendicularis est; itaque *ΔΑ* positione data est ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἡ ΔΑ. δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ε· θέσει ἄρα ἡ ΑΕ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· κείσθω τῇ ΒΕ ἴση ἡ ΒΔ, καὶ ἀπὸ τοῦ Δ τῇ ΕΔ ὀρθὴ ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΕ. φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται ἡ ΑΕ.

φανερὸν δέ, ὅτι καὶ ἐὰν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ αὐτὸ ᾖ τῷ Β, ὅτι ἡ ἀπὸ τοῦ Β ὀρθὴ ἀγομένη ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

ἔστω δὴ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΑ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῷ ἄξονι, τουτέστι τῇ ΒΔ, παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΖ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΖ. καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὴν ΓΖ τεταγμένως ἤχθω ἡ ΑΖ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΓΗ τῇ ΖΗ. καί ἐστι δοθὲν τὸ Η· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Ζ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΖΑ τεταγμένως, τουτέστι παράλληλος τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΑ. δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Α· ἀλλὰ καὶ τὸ Γ. θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΑ.

συντεθήσεται οὕτως· ἤχθω διὰ τοῦ Γ παράλληλος τῇ ΒΔ ἡ ΓΖ, καὶ κείσθω τῇ ΓΗ ἡ ΖΗ ἴση, καὶ τῇ κατὰ τὸ Η ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΖΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ. φανερὸν δή, ὅτι ποιήσει τὸ πρόβλημα.

Ἔστω πάλιν ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΔΒΓ, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΘΕ, ΘΖ. τὸ δὴ διδόμενον σημεῖον ἤτοι ἐπὶ τῆς τομῆς δοθήσεται ἢ ἐπὶ τοῦ ἄξονος ἢ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας ἢ ἐν τῷ ἐφεξῆς τόπῳ ἢ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν ἢ ἐν τῷ μεταξὺ τῶν περιεχουσῶν τὴν κατὰ κορυφὴν τῆς ὑπὸ ΖΘΕ γωνίας.

6. ὅτι] del. Halley. τό] (pr.) addidi; om. V. 10. ἡ] pc, corr. ex κ m. 1 V. 22. ΔΒΓ] ΒΔΓ V; corr. p. 23. δή] scripsi; δέ Vp.

[dat. 29]. quare A datum est [dat. 25]. uerum etiam E datum est. ergo AE positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: ponatur $B\Delta = BE$, et a Δ ad $E\Delta$ perpendicularis erigatur ΔA, ducaturque AE. manifestum igitur, AE contingere [I, 35].

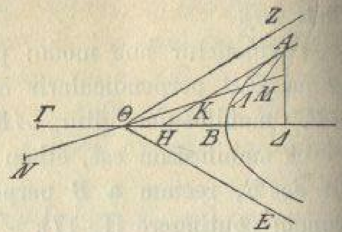
et manifestum est, etiam si datum punctum idem sit ac B, rectam a B perpendicularem ductam sectionem contingere [I, 17].

iam sit Γ punctum datum, et factum sit, sitque ΓA, per Γ autem axi, hoc est rectae $B\Delta$, parallela ducatur ΓZ; itaque ΓZ positione data est [dat. 28]. et ab A ad ΓZ ordinate ducatur AZ; itaque erit [I, 35] $\Gamma H = ZH$. et H datum est [dat. 25]; itaque etiam Z datum est [dat. 27]. et ZA ordinate erecta est, hoc est rectae in H contingenti parallela; itaque ZA positione data est [dat. 28]. quare A datum est [dat. 25]. uerum etiam Γ datum est. ergo ΓA positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: per Γ rectae $B\Delta$ parallela ducatur ΓZ, et ponatur $ZH = \Gamma H$, rectaeque in H contingenti parallela ducatur ZA, ducaturque $A\Gamma$. manifestum igitur [I, 35], hanc problema effecturam esse.

Rursus sit hyperbola, cuius axis sit $\Delta B\Gamma$, centrum autem Θ, asymptotae autem ΘE, ΘZ. datum igitur punctum aut in sectione dabitur aut in axe aut intra angulum $E\Theta Z$ aut in spatio deinceps posito aut in altera asymptotarum sectionem continentium aut in spatio inter rectas posito, quae angulum angulo $Z\Theta E$ ad uerticem positum continent.

ἔστω πρότερον ἐπὶ τῆς τομῆς ὡς τὸ Α, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΑΗ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, πλαγία δὲ τοῦ εἴδους πλευρὰ ἔστω ἡ ΒΓ· ἔσται δή, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. λόγος δὲ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἡ ΑΗ.



συντεθήσεται οὕτως· ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

πάλιν δὴ ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τοῦ ἄξονος τὸ Η, καὶ γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἡ ΑΗ ἐφαπτομένη, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΑΔ. κατὰ τὰ αὐτὰ δὴ ἔσται, ὡς ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ, οὕτως ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΒΓ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καί ἐστιν ὀρθὴ ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Η· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, καὶ τῷ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς πεποιήσθω ὁ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ, καὶ ὀρθὴ ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, καὶ ὅτι ἀπὸ τοῦ Η ἀχθήσεται ἑτέρα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

8. ΔΒ] ΑΒ V; corr. p. 21. ΒΓ] ΒΓΔ V; corr. Halley (ΓΒ). 24. δή] δέ Halley.

primum in sectione sit ut A, et factum sit, sitque contingens AH, et perpendicularis ducatur $A\Delta$, transuersum autem figurae latus sit $B\Gamma$. erit igitur [I, 36] $\Gamma\Delta : \Delta B = \Gamma H : HB$. uerum ratio $\Gamma\Delta : \Delta B$ data est [dat. 1]; nam utraque data est; itaque etiam ratio $\Gamma H : HB$ data est. et $B\Gamma$ data est; itaque H datum est [dat. 7]. uerum etiam A datum est; ergo AH positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: ab A perpendicularis ducatur $A\Delta$, sitque $\Gamma H : HB = \Gamma\Delta : \Delta B$, et ducatur AH. manifestum igitur [I, 34], rectam AH sectionem contingere.

iam rursus in axe sit datum punctum H, et factum sit, et AH contingens ducta sit, ducaturque perpendicularis $A\Delta$. eadem igitur de causa [I, 36] erit $\Gamma H : HB = \Gamma\Delta : \Delta B$. et $B\Gamma$ data est; itaque Δ datum est [dat. 7]. et ΔA perpendicularis erecta est; itaque ΔA positione data est [dat. 29]. uerum etiam sectio positione data est; itaque A datum est [dat. 25]. uerum etiam H; ergo AH positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: supponantur cetera eadem, et fiat $\Gamma\Delta : \Delta B = \Gamma H : HB$, perpendicularisque erigatur ΔA, et ducatur AH. manifestum igitur, rectam AH problema efficere [I, 34], et ab H aliam rectam sectionem contingentem ad alteram partem duci posse.

iisdem suppositis datum punctum K in spatio intra angulum $E\Theta Z$ posito sit, et oporteat a K rectam ducere sectionem contingentem. factum sit, sitque $K\Lambda$, et ducta $K\Theta$ producatur, ponaturτῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ἐντὸς τῆς ὑπὸ τῶν ΕΘΖ γωνίας τόπῳ τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΛ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ κείσθω τῇ ΛΘ ἴση ἡ ΘΝ· πάντα ἄρα δοθέντα. ἔσται δὴ καὶ ἡ ΛΝ δοθεῖσα. ἤχθω δὴ τεταγμένως ἡ ΛΜ ἐπὶ τὴν ΜΝ· ἔσται δή καί, ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΜΝ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΝΚ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΝΜ πρὸς ΜΛ δοθείς. καί ἐστι δοθὲν τὸ Λ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Μ. καὶ [παρατεταγμένως] ἀνῆκται ἡ ΜΛ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΜΛ. θέσει δὲ καὶ ἡ ΑΛΒ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Λ. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ δοθέν· δοθεῖσα ἄρα ἡ ΛΚ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτὰ καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΘΛ ἴση κείσθω ἡ ΘΝ, καὶ πεποιήσθω ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ, καὶ τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ παράλληλος ἤχθω ἡ ΜΛ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΛ· ἡ ΚΛ ἄρα ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

καὶ φανερόν, ὅτι καὶ ἑτέρα ἀχθήσεται ἀπὸ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἐπὶ τὰ ἕτερα μέρη.

τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἀπὸ τοῦ Ζ ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΖΑΕ, καὶ διὰ

---

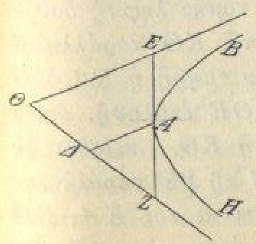
2. ἐν τῷ] om. V; corr. p (ἐντός om.). 9. καὶ τῆς] bis V (in extr. et init. uers.); corr. pvc. 10. ΜΛ] ΜΑ V; corr. p. 11. παρατεταγμένως] deleo. 15. δή] p, δέ V, Halley. 17. καὶ — κείσθω] om. V; ego addidi praeeuntibus Memo et Halleio.

que $\Theta N = \Lambda\Theta$; itaque omnia data erunt. quare etiam ΛN data erit. iam ordinate ducatur ΛM ad MN; erit igitur etiam $NK : K\Lambda = MN : M\Lambda$ [I, 36]. uerum ratio $NK : K\Lambda$ data est [dat. 1]; itaque etiam ratio $NM : M\Lambda$ data est. et Λ datum est [dat. 25]; itaque etiam M datum est [dat. 27]. et $M\Lambda$ rectae in Λ contingenti parallela ducta est; itaque positione data est $M\Lambda$ [dat. 28]. uerum etiam sectio $A\Lambda B$ positione data est; itaque Λ datum est [dat. 25]. uerum etiam K datum est; ergo ΛK data est [dat. 26].

componetur hoc modo: supponantur cetera eadem et datum punctum K, et ducta $K\Theta$ producatur, ponaturque $\Theta N = \Theta\Lambda$, et fiat $NK : K\Lambda = NM : M\Lambda$, rectaeque in Λ contingenti parallela ducatur $M\Lambda$, ducaturque $K\Lambda$. ergo $K\Lambda$ sectionem contingit [I, 34].

et manifestum est, etiam aliam rectam a K sectionem contingentem ad alteram partem duci posse.

iisdem suppositis datum punctum Z in altera asymptotarum sit, quae sectionem continent, et oporteat a Z rectam sectionem contingentem ducere. et sit factum, sitque ZAE, et per A rectae $E\Theta$ parallela ducatur $A\Delta$. erit igitur $\Delta\Theta = \Delta Z$ [Eucl. VI, 2], quoniam etiam



$$ZA = AE \text{ [prop. III]}.$$

et $Z\Theta$ data est; itaque Δ datum est [dat. 7]. et per datum punctum Δ rectae $E\Theta$ positione datae parallela ducta est ΔA; itaque ΔA positione data est [dat. 28]. uerum etiam sectio τοῦ Α τῇ ΕΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ ἴση ἡ ΔΘ τῇ ΔΖ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ ἴση ἐστί. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΖΘ· δοθὲν ἄρα τὸ Δ. καὶ διὰ δεδομένου τοῦ Δ παρὰ θέσει τὴν ΕΘ παράλληλος ἦκται ἡ ΔΑ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΔΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Ζ· θέσει ἄρα ἡ ΖΑΕ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ τομὴ ἡ ΑΒ, καὶ αἱ ΕΘ, ΘΖ ἀσύμπτωτοι, καὶ τὸ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων τῶν περιεχουσῶν τὴν τομὴν τὸ Ζ, καὶ τετμήσθω ἡ ΖΘ δίχα κατὰ τὸ Δ, καὶ διὰ τοῦ Δ τῇ ΘΕ παράλληλος ἤχθω ἡ ΔΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΖΑ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΖΔ τῇ ΔΘ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΖΑ τῇ ΑΕ. ὥστε διὰ τὰ προδεδειγμένα ἡ ΖΑΕ ἐφάπτεται τῆς τομῆς.

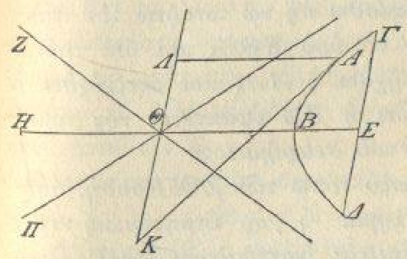
τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω τὸ δοθὲν σημεῖον ἐν τῷ ὑπὸ τὴν γωνίαν τὴν ἑξῆς τόπῳ τῶν περιεχουσῶν τὴν τομήν, καὶ ἔστω τὸ Κ· δεῖ δὴ ἀπὸ τοῦ Κ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω· ἔσται δὴ θέσει. ἐὰν δὴ ἐπὶ τῆς τομῆς ληφθῇ δοθὲν σημεῖον τὸ Γ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΚΘ παράλληλος ἀχθῇ ἡ ΓΔ, ἔσται θέσει. καὶ ἐὰν τμηθῇ ἡ ΓΔ δίχα κατὰ τὸ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΘΕ ἐκβληθῇ, ἔσται θέσει διάμετρος οὖσα συζυγὴς τῇ ΚΘ. κείσθω δὴ τῇ ΒΘ ἴση ἡ ΘΗ, καὶ διὰ τοῦ Α τῇ ΒΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΑΛ· ἔσται δὴ διὰ τὸ εἶναι τὰς ΚΛ, ΒΗ συζυγεῖς διαμέτρους καὶ ἐφαπτομένην τὴν ΑΚ καὶ τὴν ΑΛ ἀχθεῖσαν παρὰ τὴν ΒΗ τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΛ

8. δή] p, δέ V. 10. τῶν] (alt.) καί Vp; corr. Comm. 14. ΖΑΕ] scripsi, ΖΑ Vp. 24. ΘΕ] ΘΕΑ V; corr. Memus; ΘΕΒ c, ΕΒΘ p.

positione data est; quare A datum est [dat. 25]. uerum etiam Z datum est; ergo positione data est ZAE [dat. 26].

componetur hoc modo: sit AB sectio, et $E\Theta$, ΘZ asymptotae, et datum punctum Z in altera asymptotarum sectionem continentium positum, seceturque in Δ in duas partes aequales $Z\Theta$, et per Δ rectae ΘE parallela ducatur ΔA, ducaturque ZA. et quoniam est $Z\Delta = \Delta\Theta$, erit etiam $ZA = AE$ [Eucl. VI, 2]. ergo propter ea, quae supra demonstrauimus [prop. IX], ZAE sectionem contingit.

iisdem suppositis datum punctum in spatio sub angulo posito, qui deinceps est rectis sectionem continentibus, positum sit, et sit K. oportet igitur a K rectam sectionem contingentem ducere. et factum sit, sitque KA, et ducta $K\Theta$ producatur; itaque positione data erit [dat. 26]. si igitur in sectione



datum punctum Γ sumitur, et per Γ rectae $K\Theta$ parallela ducitur $\Gamma\Delta$, positione data erit [dat. 28]. et si $\Gamma\Delta$ in E in duas partes aequales secatur, ductaque ΘE producitur, positione data erit [dat. 7, 26], et diametrus erit cum $K\Theta$ coniugata [I def. 6]. ponatur igitur $\Theta H = B\Theta$, et per A rectae $B\Theta$ parallela ducatur $A\Lambda$. itaque quoniam $K\Lambda$, BH diametri coniugatae sunt, et AK contingens, $A\Lambda$ autem rectae BH parallela, erit [I, 38; deff. alt. 3] $K\Theta \times \Theta\Lambda$

ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΒΗ εἴδους. δοθὲν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΘΛ. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ ΚΘ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ΘΛ. ἀλλὰ καὶ τῇ θέσει· καί ἐστι δοθὲν τὸ Θ· δοθὲν ἄρα καὶ τὸ Λ. καὶ διὰ τοῦ Λ παρὰ θέσει τὴν ΒΗ ἦκται ἡ ΛΑ· θέσει ἄρα ἡ ΛΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΑΚ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ὑποκείσθω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ ἐν τῷ προειρημένῳ τόπῳ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον τὸ Γ, καὶ τῇ ΚΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ τετμήσθω ἡ ΓΔ δίχα τῷ Ε, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΕΘ ἐκβεβλήσθω, καὶ τῇ ΒΘ ἴση κείσθω ἡ ΘΗ· ἡ ἄρα ΗΒ πλαγία διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ ΚΘΛ. κείσθω δὴ τῷ τετάρτῳ τοῦ παρὰ τὴν ΒΗ εἴδους ἴσον τὸ ὑπὸ ΚΘΛ, καὶ διὰ τοῦ Λ τῇ ΒΗ παράλληλος ἤχθω ἡ ΛΑ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΑ· φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΚΑ ἐφάπτεται τῆς τομῆς διὰ τὴν ἀντιστροφὴν τοῦ θεωρήματος.

ἐὰν δὲ ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν ΖΘΠ δοθῇ, ἀδύνατον ἔσται τὸ πρόβλημα. ἡ γὰρ ἐφαπτομένη τεμεῖ τὴν ΗΘ. ὥστε συμπεσεῖται ἑκατέρᾳ τῶν ΖΘΠ· ὅπερ ἀδύνατον διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ λα' τοῦ πρώτου καὶ ἐν τῷ τρίτῳ τούτου τοῦ βιβλίου.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, τὸ δὲ δοθὲν σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Α, καὶ δέον ἔστω ἀπὸ τοῦ Α ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΑΗ, καὶ τεταγμένως ἀπὸ τοῦ Α ἐπὶ τὸν ΒΓ ἄξονα ἤχθω ἡ ΑΔ· ἔσται δὴ δοθὲν τὸ Δ, καὶ

8. δή] δέ Halley. 19. ἀναστροφήν Vp; corr. Halley. τοῦ λη' θεωρήματος τοῦ πρώτου βιβλίου Halley cum Commandino.

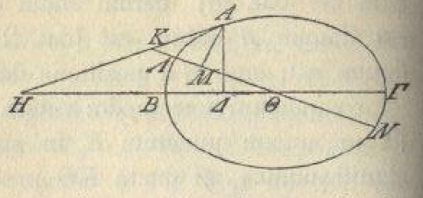
quartae parti figurae ad BH adplicatae aequale. itaque $K\Theta \times \Theta\Lambda$ datum est. et KΘ data est [dat. 26]; itaque etiam ΘΛ data est [dat. 57]. uerum etiam positione data est; et Θ datum est; itaque etiam Λ datum est [dat. 27]. et per Λ rectae BH positione datae parallela ducta est ΛA; itaque ΛA positione data est [dat. 28]. uerum etiam sectio positione data est; itaque A datum est [dat. 25]. uerum etiam K datum est; ergo AK positione data est [dat. 26].

componetur hoc modo: cetera eadem supponantur, datum autem punctum K in spatio positum, quod significauimus, et ducta KΘ producatur, sumaturque punctum aliquod Γ, et rectae KΘ parallela ducatur ΓΔ, seceturque in E in duas partes aequales ΓΔ, et ducta EΘ producatur, ponaturque $\Theta H = B\Theta$; itaque HB diametrus transuersa est cum KΘΛ coniugata [I def. 6]. ponatur igitur $K\Theta \times \Theta\Lambda$ quartae parti figurae ad BH adplicatae aequale, et per Λ rectae BH parallela ducatur ΛA, ducaturque KA. manifestum igitur propter conuersionem theorematis supra citati [I, 38], rectam KA sectionem contingere.

sin punctum in spatio inter ZΘ, ΘΠ posito datum erit, problema effici non poterit. nam recta contingens rectam HΘ secabit; quare cum utraque ZΘ, ΘΠ concidet; quod fieri non potest propter ea, quae demonstrauimus in prop. XXXI libri primi et in tertia huius libri.

Iisdem suppositis sectio ellipsis sit datumque punctum A in sectione positum, et oporteat ab A rectam sectionem contingentem ducere. factum sit, sitque AH, et ab A ad axem BΓ ordinate ducatur ἔσται, ὡς ἡ ΓΔ πρὸς ΔΒ, οὕτως ἡ ΓΗ πρὸς ΗΒ. καί ἐστι λόγος τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ δοθείς. δοθὲν ἄρα τὸ Η. ἀλλὰ καὶ τὸ Α· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΑΗ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἤχθω κάθετος ἡ ΑΔ, καὶ τῷ τῆς ΓΔ πρὸς ΔΒ λόγῳ ὁ αὐτὸς ἔστω ὁ τῆς ΓΗ πρὸς ΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΗ. φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΑΗ ἐφάπτεται, ὥσπερ καὶ ἐπὶ τῆς ὑπερβολῆς.



ἔστω δὴ πάλιν τὸ δοθὲν σημεῖον τὸ Κ, καὶ δέον ἔστω ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην. γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΚΑ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΚΛΘ ἐπὶ τὸ Θ κέντρον ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ν· ἔσται δὴ θέσει. καὶ ἐὰν ἀχθῇ ἡ ΑΜ τεταγμένως, ἔσται ὡς ἡ ΝΚ πρὸς ΚΛ, οὕτως ἡ ΝΜ πρὸς ΜΛ. λόγος δὲ τῆς ΚΝ πρὸς ΚΛ δοθείς· λόγος ἄρα καὶ τῆς ΜΝ πρὸς ΛΜ δοθείς. δοθὲν ἄρα τὸ Μ. καὶ ἀνῆκται ἡ ΜΑ· παράλληλος γάρ ἐστι τῇ κατὰ τὸ Λ ἐφαπτομένῃ· θέσει ἄρα ἡ ΜΑ. δοθὲν ἄρα το Α. ἀλλὰ καὶ τὸ Κ· θέσει ἄρα ἡ ΚΑ.

ἡ δὲ σύνθεσις ἡ αὐτὴ τῇ πρὸ αὐτοῦ.

ν΄.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

5. δή] δέ Halley.

$A\Delta$; itaque Δ datum est [dat. 28, 25], eritque [I, 36] $\Gamma\Delta : \Delta B = \Gamma H : HB$. et ratio $\Gamma\Delta : \Delta B$ data est [dat. 1]; itaque etiam ratio $\Gamma H : HB$ data est. quare H datum est. uerum etiam A datum est. ergo positione data est AH [dat. 26].

componetur hoc modo: ducatur perpendicularis $A\Delta$, sitque $\Gamma H : HB = \Gamma\Delta : \Delta B$, et ducatur AH. manifestum igitur, ut in hyperbola, rectam AH contingere [I, 34].

iam rursus datum punctum sit K, et oporteat contingentem ducere. factum sit, sitque KA, et ducta ad centrum Θ recta $K\Lambda\Theta$ ad N producatur; positione igitur data erit [dat. 26]. et si AM ordinate ducitur, erit $NM : M\Lambda = NK : K\Lambda$ [I, 36]. uerum ratio $KN : K\Lambda$ data est [dat. 1]; quare etiam ratio $MN : \Lambda M$ data est. itaque M datum est [dat. 7]. et erecta[1] est MA; rectae enim in Λ contingenti parallela est. itaque MA positione data est [dat. 29]. quare A datum est [dat. 25]. uerum etiam K datum est. ergo KA positione data est [dat. 26].

compositio autem eadem est ac in praecedenti [I, 34].

L.

Datam coni sectionem contingentem ducere rectam, quae ad axem ad easdem partes, in quibus est sectio, angulum efficiat dato angulo acuto aequalem.

coni sectio prius sit parabola, cuius axis sit AB. oportet igitur sectionem contingentem rectam ducere, quae ad axem AB ad easdem partes, in quibus est sectio, angulum efficiat dato angulo acuto aequalem.

1) Sc. in dato angulo.

ἔστω κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ΑΒ ἄξονι γωνίαν ποιήσει ἐπὶ τὰ αὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ ΓΔ· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΒΔΓ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ· ἔστι δὴ καὶ ἡ πρὸς τῷ Β δοθεῖσα. λόγος ἄρα τῆς ΔΒ πρὸς ΒΓ δοθείς. τῆς δὲ ΒΔ πρὸς ΒΑ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς ΑΒ ἄρα πρὸς ΒΓ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστι δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Β γωνία· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΒΑΓ. καί ἐστι πρὸς θέσει τῇ ΒΑ καὶ δοθέντι τῷ Α· θέσει ἄρα ἡ ΓΑ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ ἐφάπτεται ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ.

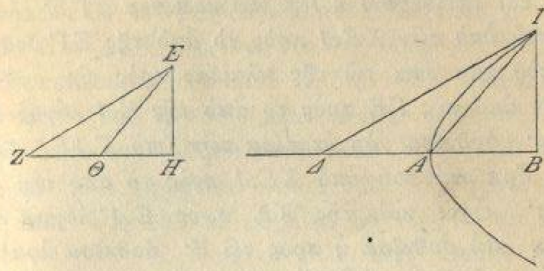
συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ ΕΖΗ, καὶ εἰλήφθω σημεῖον ἐπὶ τῆς ΕΖ τὸ Ε, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΕΗ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΖΗ τῷ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘΕ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΘΕ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΒΑΓ, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΒΓ, καὶ τῇ ΒΑ ἴση κείσθω ἡ ΑΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΔ. ἐφαπτομένη ἄρα ἐστὶν ἡ ΓΔ τῆς τομῆς.

λέγω δή, ὅτι ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΒ τῇ ὑπὸ τῶν ΕΖΗ ἐστιν ἴση.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΘ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΑ, ἔστι δὲ καὶ ὡς ἡ ΘΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς ΒΓ, δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΖΗ πρὸς ΗΕ, οὕτως ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ

6. δή] δέ Vp; corr. Halley.

factum sit, sitque $\Gamma\Delta$; itaque $\angle B\Delta\Gamma$ datus est. perpendicularis ducatur $B\Gamma$; itaque etiam angulus ad B positus datus est. quare ratio $\Delta B : B\Gamma$ data est [dat. 40]. uerum ratio $B\Delta : BA$ data est [dat. 1].



itaque etiam ratio $AB : B\Gamma$ data est [dat. 8]. et angulus ad B positus datus est; quare etiam $\angle BA\Gamma$ datus est [dat. 41]. et ad rectam BA positione datam punctumque datum A positus est; itaque ΓA positione data est [dat. 29]. uerum etiam sectio positione data est; itaque Γ datum est [dat. 25]. et $\Gamma\Delta$ contingit; ergo $\Gamma\Delta$ positione data est.

componetur problema hoc modo: sit data coni sectio prius parabola, cuius axis sit AB, angulus autem acutus datus sit EZH, sumaturque in EZ punctum E, et perpendicularis ducatur EH, seceturque ZH in Θ in duas partes aequales, et ducatur ΘE, construatur autem $\angle BA\Gamma = H\Theta E$, et perpendicularis ducatur $B\Gamma$, ponaturque $A\Delta = BA$, et ducatur $\Gamma\Delta$. itaque $\Gamma\Delta$ sectionem contingit [I, 35].

iam dico, esse $\angle \Gamma\Delta B = EZH$.

nam quoniam est $ZH : H\Theta = \Delta B : BA$, et [Eucl. VI, 2] etiam $\Theta H : HE = AB : B\Gamma$, ex aequo πρὸς τοῖς Η, Β γωνίαι·* ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ Ζ γωνία τῇ Δ γωνίᾳ.

Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, καὶ γεγονέτω, καὶ ἔστω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΧ καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· λόγος ἄρα τοῦ ὑπὸ τῶν ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ δοθείς· ὁ αὐτὸς γάρ ἐστι τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν. τοῦ δὲ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς· δοθεῖσα γὰρ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΔΕ, ΔΕΓ. λόγος ἄρα καὶ τοῦ ὑπὸ ΧΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΔ δοθείς· ὥστε καὶ τῆς ΧΕ πρὸς ΕΔ λόγος ἐστὶ δοθείς. καὶ δοθεῖσα ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ πρὸς τῷ Χ. πρὸς δὴ θέσει εὐθείᾳ τῇ ΧΕ καὶ δοθέντι τῷ Χ διῆκταί τις ἡ ΓΧ ἐν δεδομένῃ γωνίᾳ· θέσει ἄρα ἡ ΓΧ. θέσει δὲ καὶ ἡ τομή· δοθὲν ἄρα τὸ Γ. καὶ διῆκται ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

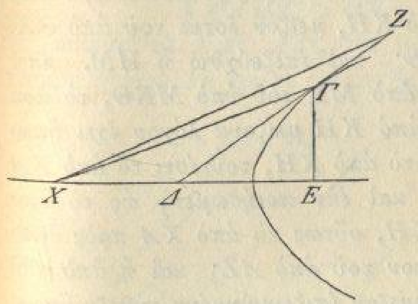
ἤχθω ἀσύμπτωτος τῆς τομῆς ἡ ΖΧ· ἡ ΓΔ ἄρα ἐκβληθεῖσα συμπεσεῖται τῇ ἀσυμπτώτῳ. συμπιπτέτω κατὰ το Ζ. μείζων ἄρα ἔσται ἡ ὑπὸ ΖΔΕ γωνία τῆς ὑπὸ ΖΧΔ. δεήσει ἄρα εἰς τὴν σύνθεσιν τὴν δεδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μείζονα εἶναι τῆς ἡμισείας τῆς περιεχομένης ὑπὸ τῶν ἀσυμπτώτων.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΧΖ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα μείζων οὖσα τῆς ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἡ ὑπὸ ΚΘΗ, καὶ ἔστω τῇ ὑπὸ τῶν ΑΧΖ ἴση ἡ ὑπὸ ΚΘΔ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ Α τῇ ΑΒ πρὸς ὀρθὰς ἡ ΑΖ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΗΘ τὸ

1. ἴση] εἴση V; corr. cvp.

est [Eucl. V, 20] $ZH : HE = \varDelta B : B\Gamma$. et anguli ad H, B positi recti sunt; ergo $\angle Z = \angle \varDelta$ [Eucl. VI, 6].

Iam sit data sectio hyperbola, et sit factum, contingatque $\Gamma\varDelta$, et sumatur X centrum sectionis, ducaturque ΓX et perpendicularis ΓE; itaque ratio $XE \times E\varDelta : E\Gamma^2$ data est; eadem enim est ac ratio lateris transuersi ad rectum [I, 37]. data autem ratio $\Gamma E^2 : E\varDelta^2$ [dat. 40, 50]; nam uterque angulus $\Gamma\varDelta E$, $\varDelta E\Gamma$ datus est. itaque etiam ratio $XE \times E\varDelta : E\varDelta^2$ data est [dat. 8]; quare etiam ratio $XE : E\varDelta$ data est [Eucl. VI, 1]. et angulus ad E positus datus est; itaque etiam angulus ad X positus [dat. 8, 41]. itaque ad rectam XE positione datam punctumque datum X in angulo dato ducta est recta ΓX; ΓX igitur positione data est [dat. 29].



uerum etiam sectio positione data est; itaque Γ datum est [dat. 25]. et $\Gamma\varDelta$ contingens ducta est; ergo $\Gamma\varDelta$ positione data est.

ducatur asymptota sectionis ZX; $\Gamma\varDelta$ igitur producta cum asymptota concurret [prop. III]. concurrat in Z. itaque erit $\angle Z\varDelta E > ZX\varDelta$ [Eucl. I, 16]. ad compositionem igitur necesse erit, angulum acutum datum maiorem esse dimidio angulo ab asymptotis comprehenso.

componetur problema hoc modo: sit data hyper-

Η, καὶ ἤχθω ἀπ' αὐτοῦ ἐπὶ τὴν ΘΚ κάθετος ἡ ΗΚ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν η ὑπὸ ΖΧΑ τῇ ὑπὸ ΑΘΚ, εἰσὶ δὲ καὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Κ γωνίαι ὀρθαί, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΘΚ πρὸς ΚΑ. ἡ δὲ ΘΚ προς ΚΑ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ πρὸς τὴν ΗΚ· καὶ ἡ ΧΑ πρὸς ΑΖ ἄρα μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΘΚ πρὸς ΚΗ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ἡ πλαγία ἄρα πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ ΘΚ πρὸς το ἀπὸ ΚΗ. ἐὰν δὴ ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, οὕτως ἄλλο τι πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, μεῖζον ἔσται τοῦ ἀπὸ ΘΚ. ἔστω τὸ ὑπὸ ΜΚΘ· καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν μεῖζόν ἐστι τὸ ἀπὸ ΜΚ τοῦ ὑπὸ ΜΚΘ, τὸ ἄρα ἀπὸ ΜΚ πρὸς το ἀπὸ ΚΗ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ ΜΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ. καὶ ἐὰν ποιήσωμεν, ὡς τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΗ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΧΑ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς ἔλαττον τοῦ ἀπὸ ΑΖ· καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ Χ ἐπὶ τὸ ληφθὲν σημεῖον ἐπιζευγνυμένη εὐθεῖα ὅμοια ποιήσει τὰ τρίγωνα, καὶ διὰ τοῦτο μείζων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΧΑ τῆς ὑπὸ ΗΜΚ. κείσθω δὴ τῇ ὑπὸ ΗΜΚ ἴση ἡ ὑπο ΑΧΓ· ἡ ἄρα ΧΓ τεμεῖ τὴν τομήν. τεμνέτω κατὰ τὸ Γ, καὶ ἀπὸ τοῦ Γ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΓΔ, καὶ κάθετος ἡ ΓΕ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΓΧΕ τρίγωνον τῷ ΗΜΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ἀπο ΕΓ, τὸ ἀπὸ ΜΚ πρὸς το ἀπὸ

15. τοῦ] pc, corr. ex τό m. 1 V. 20. ΑΖ] c, ΑΖ uel ΑΔ (littera Ζ obscura) V; ΑΔ vp. 26. ὅμοια cv et, ut uidetur, V; corr. p.

bola, cuius axis sit AB, asymptota autem XZ, et datus angulus acutus $K\Theta H > AXZ$, et sit

$$\angle K\Theta A = AXZ,$$

ducaturque ab A ad AB perpendicularis AZ, in $H\Theta$ autem punctum aliquod sumatur H, ducaturque ab eo ad ΘK perpendicularis HK. iam quoniam est

$$\angle ZXA = A\Theta K,$$

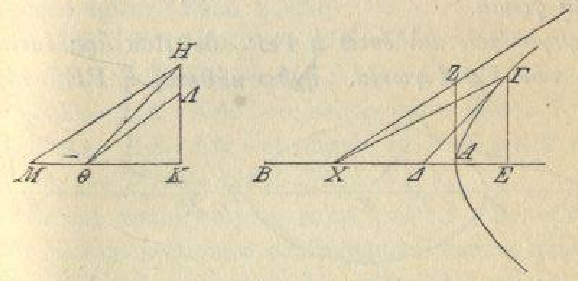
et etiam anguli ad A, K positi recti sunt, erit

$$XA : AZ = \Theta K : KA \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

est autem $\Theta K : KA > \Theta K : KH$ [Eucl. V, 8]. itaque etiam $XA : AZ > \Theta K : KH$. quare etiam

$$XA^2 : AZ^2 > \Theta K^2 : KH^2.$$

est autem, ut $XA^2 : AZ^2$, ita latus transuersum ad rectum [prop. I]; quare etiam latus transuersum ad



latus rectum maiorem rationem habet quam $\Theta K^2 : KH^2$. itaque si fecerimus, ut $XA^2 : AZ^2$, ita aliam magnitudinem ad KH^2, ea maior erit quam ΘK^2 [Eucl. V, 8]. sit $MK \times K\Theta$, et ducatur HM. iam quoniam est $MK^2 > MK \times K\Theta$, erit [Eucl. V, 8]

$$MK^2 : KH^2 > MK \times K\Theta : KH^2,$$

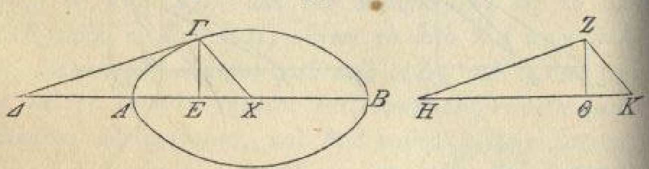
hoc est $MK^2 : KH^2 > XA^2 : AZ^2$. et si fecerimus,

In Vvc figurae huic adiectae sunt VI rectae totidemque rectangula, quae quid sibi uelint, in praefatione exponam; om. p.

KH. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ $XE\varDelta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$ καὶ το ὑπὸ $MK\Theta$ πρὸς το ἀπὸ KH. καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓE πρὸς τὸ ὑπο $XE\varDelta$, τὸ ἀπὸ HK πρὸς τὸ ὑπὸ $MK\Theta$· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ XE πρὸς τὸ ὑπὸ $XE\varDelta$, τὸ ἀπὸ MK πρὸς τὸ ὑπὸ $MK\Theta$. καὶ ὡς ἄρα ἡ XE πρὸς $E\varDelta$, ἡ MK πρὸς $K\Theta$. ἦν δὲ καί, ὡς ἡ ΓE πρὸς EX, ἡ HK πρὸς KM· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓE πρὸς $E\varDelta$, ἡ HK πρὸς $K\Theta$. καί εἰσιν ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς E, K γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ πρὸς τῷ $\varDelta$ γωνία τῇ ὑπὸ $H\Theta K$.

Ἔστω ἡ τομὴ ἔλλειψις, ἧς ἄξων ὁ AB. δεῖ δὴ ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν τῆς τομῆς, ἥτις πρὸς τῷ ἄξονι ἐπὶ ταὐτὰ τῇ τομῇ ἴσην γωνίαν περιέξει τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ γωνίᾳ.

γεγονέτω, καὶ ἔστω ἡ $\Gamma\varDelta$· δοθεῖσα ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν $\Gamma\varDelta A$ γωνία. ἤχθω κάθετος ἡ ΓE· λόγος



ἄρα τοῦ ἀπὸ τῆς $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$ δοθείς. ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ X, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓX. τοῦ δὴ ἀπὸ τῆς ΓE πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\varDelta EX$ λόγος ἐστὶ δοθείς· ὁ γὰρ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν· καὶ τοῦ ἀπὸ τῆς $\varDelta E$ ἄρα πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν $\varDelta EX$ λόγος ἐστὶ δοθείς· καὶ τῆς $\varDelta E$ ἄρα πρὸς EX λόγος

4. πρός] om. V; corr. p. 13. ἥτις] ἢ τῆς V; corr. p. 16. ἡ] (alt.) om. V; corr. p. 20. δή] δέ V; corr. Halley.

ut $MK^2 : KH^2$, ita XA^2 ad aliam magnitudinem, erit ad magnitudinem minorem quam AZ^2 [Eucl. V, 8]; et recta a X ad punctum sumptum ducta triangulos similes efficiet [Eucl. VI, 6], et ideo erit

$$\angle ZXA > HMK.^{1)}$$

ponatur igitur $\angle AX\Gamma = HMK$; $X\Gamma$ igitur sectionem secabit [prop. II]. secet in Γ, et a Γ sectionem contingens ducatur $\Gamma\varDelta$ [prop. XLIX], et ΓE perpendicularis; itaque triangulus ΓXE triangulo HMK similis est. quare $XE^2 : E\Gamma^2 = MK^2 : KH^2$ [Eucl. VI, 4]. est autem etiam, ut latus transuersum ad rectum, ita $XE \times E\varDelta : E\Gamma^2$ [I, 37] et $MK \times K\Theta : KH^2$. et e contrario [Eucl. V, 7 coroll.] erit

$$\Gamma E^2 : XE \times E\varDelta = HK^2 : MK \times K\Theta.$$

ex aequo igitur [Eucl. V, 20]

$$XE^2 : XE \times E\varDelta = MK^2 : MK \times K\Theta.$$

quare etiam $XE : E\varDelta = MK : K\Theta$. erat autem etiam $\Gamma E : EX = HK : KM$. ex aequo igitur [Eucl. V, 20] $\Gamma E : E\varDelta = HK : K\Theta$. et anguli ad E, K positi recti sunt; itaque $\angle \varDelta = H\Theta K$ [Eucl. VI, 6].

Iam sit sectio ellipsis, cuius axis sit AB. oportet igitur rectam sectionem contingentem ducere, quae ad axem ad easdem partes, in quibus est sectio, angulum comprehendat dato angulo acuto aequalem.

factum sit, sitque $\Gamma\varDelta$; itaque $\angle \Gamma\varDelta A$ datus est. perpendicularis ducatur ΓE; itaque ratio $\varDelta E^2 : E\Gamma^2$ data est [dat. 1]. sit X centrum sectionis, et ducatur ΓX. itaque ratio $\Gamma E^2 : \varDelta E \times EX$ data est; nam

1) Nam ob similitudinem trianguli HMK eiusque, quem efficit recta a X ad sumptum punctum (x) ducta, erit $\angle HMK = AXx$; et $\angle AXx < AXZ$, quia $Ax < AZ$.

ἐστὶ δοθείς. τῆς δὲ ΔΕ πρὸς ΕΓ· καὶ τῆς ΓΕ ἄρα πρὸς ΕΧ λόγος ἐστὶ δοθείς. καί ἐστιν ὀρθή ἡ πρὸς τῷ Ε· δοθεῖσα ἄρα ἡ πρὸς τῷ Χ γωνία. καί ἐστι πρὸς θέσει καὶ δοθέντι σημείῳ· δοθὲν ἄρα ἐστὶ τὸ Γ σημεῖον. καὶ ἀπὸ δεδομένου τοῦ Γ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ· θέσει ἄρα ἡ ΓΔ.

συντεθήσεται δὴ τὸ πρόβλημα οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα γωνία ὀξεῖα ἡ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΖΗ τὸ Ζ, καὶ κάθετος ἤχθω ἡ ΖΘ, καὶ πεποιήσθω, ὡς ἡ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν, τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΗΘΚ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΚΖ, καὶ ἔστω κέντρον τῆς τομῆς τὸ Χ, καὶ τῇ ὑπὸ τῶν ΗΚΖ γωνίᾳ ἴση συνεστάτω ἡ ὑπὸ τῶν ΑΧΓ, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΓΔ ποιεῖ τὸ πρόβλημα, τουτέστιν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ τῶν ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ τῶν ΖΗΘ.

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ, καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ τῆς ΧΕ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΕΓ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΚΘ πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ τῆς ΓΕ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΔΕΧ, οὕτως τὸ ἀπὸ τῆς ΖΘ πρὸς τὸ ὑπὸ τῶν ΚΘΗ· ἑκάτερος γὰρ ὁ αὐτός ἐστι τῷ τῆς ὀρθίας πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ δι' ἴσου· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΧΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΧΕΔ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΚΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΘΚ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΧΕ πρὸς τὴν ΕΔ, οὕτως ἡ ΚΘ πρὸς τὴν ΘΗ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΧΕ πρὸς ΓΕ, ἡ ΚΘ πρὸς ΖΘ· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ ΔΕ πρὸς ΕΓ, οὕτως ἡ ΗΘ πρὸς τὴν ΖΘ. καὶ περὶ ὀρθὰς γωνίας

1. Post ΕΓ add. λόγος ἐστὶ δοθείς p. ΓΕ] ΧΕ Vp; corr. Memus. 12. ἔστω] τό V; correxi praeeunte Halleio (del. καὶ τό). 13. ΗΚΖ] ΗΖ V; corr. p (ΗΚ, ΚΖ). 22. ὁ] om. V; corr. p. 24. οὕτως] οὔ Vv, οὕτω p. ΚΘ] p, ΚΘ uel ΚΟ V; ΚΟ cv. ΗΘΚ] ΚΗΘ Vv, τῶν ΚΘ, ΘΗ p; corr. Memus.

eadem est ac ratio lateris recti ad transuersum [I, 37]. quare etiam ratio $\Delta E^2 : \Delta E \times EX$ data est [dat. 8]. itaque etiam ratio $\Delta E : EX$ data est. uerum ratio $\Delta E : E\Gamma$ data; quare etiam ratio $\Gamma E : EX$ data est [dat. 8]. et angulus ad E positus rectus est; itaque angulus ad X positus datus est [dat. 41]. et ad rectam positione datam punctumque datum positus est; itaque punctum Γ datum est [dat. 29, 25]. et a dato puncto Γ contingens ducta est $\Gamma\Delta$; ergo $\Gamma\Delta$ positione data est.

componetur problema hoc modo: sit $ZH\Theta$ datus angulus acutus, sumaturque in ZH punctum Z, et perpendicularis ducatur $Z\Theta$, fiatque, ut latus rectum ad transuersum, ita $Z\Theta^2$ ad $H\Theta \times \Theta K$, ducaturque KZ, centrum autem sectionis sit X, et construatur $\angle AX\Gamma = \angle HKZ$, ducaturque sectionem contingens $\Gamma\Delta$ [prop. XLIX]. dico, $\Gamma\Delta$ problema efficere, hoc est, esse $\angle \Gamma\Delta E = ZH\Theta$.

nam quoniam est [Eucl. VI, 4] $XE : E\Gamma = K\Theta : Z\Theta$, erit etiam $XE^2 : E\Gamma^2 = K\Theta^2 : Z\Theta^2$. est autem etiam

$$\Gamma E^2 : \Delta E \times EX = Z\Theta^2 : K\Theta \times \Theta H;$$

utraque enim eadem est ac ratio lateris recti ad transuersum [I, 37]. et ex aequo [Eucl. V, 20]; erit igitur $XE^2 : XE \times E\Delta = K\Theta^2 : H\Theta \times \Theta K$. quare etiam $XE : E\Delta = K\Theta : \Theta H$. est autem etiam

$$XE : \Gamma E = K\Theta : Z\Theta.$$

itaque ex aequo [Eucl. V, 20] $\Delta E : E\Gamma = H\Theta : Z\Theta$.

αἱ πλευραὶ ἀνάλογον· ἡ ἄρα ὑπὸ ΓΔΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΖΗΘ γωνίᾳ ἐστὶν ἴση. ἡ ΓΔ ἄρα ποιεῖ τὸ πρόβλημα.

να'.

Τῆς δοθείσης κώνου τομῆς ἀγαγεῖν ἐφαπτομένην, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ.

ἔστω ἡ δοθεῖσα κώνου τομὴ πρότερον παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ· δεῖ δὴ ἀγαγεῖν τῆς παραβολῆς ἐφαπτομένην, ἥτις μετὰ τῆς ἀπὸ τῆς ἁφῆς διαμέτρου ἴσην περιέξει γωνίαν τῇ πρὸς τῷ Θ.

γεγονέτω, καὶ ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῇ ΕΓ τὴν ὑπὸ ΕΓΔ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ συμπιπτέτω ἡ ΓΔ τῷ ἄξονι κατὰ τὸ Δ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΑΔ τῇ ΕΓ, ἡ ὑπὸ ΑΔΓ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ ἴση ἐστί. δοθεῖσα δὲ ἡ ὑπὸ ΕΓΔ· ἴση γάρ ἐστι τῇ Θ· δοθεῖσα ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΔΓ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω παραβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἡ Θ. ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓΔ ποιοῦσα πρὸς τῷ ἄξονι τὴν ὑπὸ τῶν ΑΔΓ γωνίαν ἴσην τῇ Θ, καὶ διὰ τοῦ Γ τῇ ΑΒ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΓ. ἐπεὶ οὖν ἡ Θ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΔΓ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΔΓ ἴση τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, καὶ ἡ Θ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΓΔ.

Ἔστω ἡ τομὴ ὑπερβολή, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἀσύμπτωτος δὲ η ΕΤ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία

9. ἡ Θ] ΗΘ V; corr. Memus. 15. ΕΓΔ] ΕΓΑ V; corr. p. 23. ΑΔΓ] ΔΑΓ V; corr. p (ΓΔΑ).

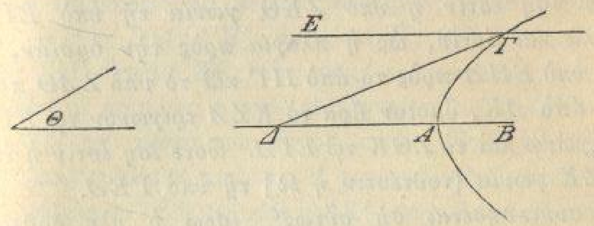
et latera rectos angulos comprehendentia proportionalia sunt; itaque ∠ ΓΔΕ = ΖΗΘ [Eucl. VI, 6]. ergo ΓΔ problema efficit.

LI.

Datam coni sectionem contingentem rectam ducere, quae cum diametro per punctum contactus ducta angulum comprehendat dato angulo acuto aequalem.

data coni sectio prius sit parabola, cuius axis sit ΑΒ, datus autem angulus sit Θ. oportet igitur parabolam contingentem rectam ducere, quae cum diametro a puncto contactus ducta angulum comprehendat angulo Θ aequalem.

sit factum, contingensque ducta sit ΓΔ ad ΕΓ diametrum per punctum contactus ductam angulum ΕΓΔ efficiens angulo Θ aequalem, et ΓΔ cum axe

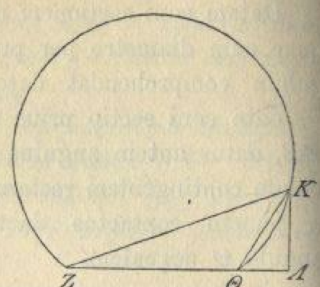


concurrat in Δ. iam quoniam ΑΔ rectae ΕΓ parallela est [I, 51 coroll.], erit ∠ ΑΔΓ = ΕΓΔ [Eucl. I, 29]. uerum ∠ ΕΓΔ datus est; est enim ∠ ΕΓΔ = Θ; ergo etiam ∠ ΑΔΓ datus est.

componetur hoc modo: sit parabola, cuius axis sit ΑΒ, datus autem angulus sit Θ. ducatur sectionem contingens ΓΔ ad axem efficiens angulum ΑΔΓ

Hic quoque figurae adiecta sunt quattuor rectangula rectaeque in Vvc; om. p.

ὀξεῖα ἡ Ω, καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΓΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ ποιοῦσα τὸ πρόβλημα, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ΓΗ. δοθεὶς ἄρα λόγος ἐστὶ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν· ὥστε καὶ τοῦ ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΗ. ἐκκείσθω δή τις εὐθεῖα δεδομένη η ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γεγράφθω κύκλου τμῆμα δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Ω· ἔσται ἄρα μεῖζον ἡμικυκλίου. καὶ ἀπό τινος σημείου τῶν ἐπὶ τῆς περιφερείας τοῦ Κ ἤχθω κάθετος ἡ ΚΛ ποιοῦσα τὸν τοῦ ὑπὸ ΖΛΘ



πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ λόγον τὸν αὐτὸν τῷ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΖΚΘ γωνία τῇ ὑπὸ ΕΓΔ, ἀλλὰ καί ἐστιν, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τό τε ὑπὸ ΕΗΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΓ καὶ τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, ὅμοιον ἄρα τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΕΓΗ τριγώνῳ καὶ τὸ ΖΘΚ τῷ ΕΓΔ. ὥστε ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΘΖΚ γωνία [τουτέστιν ἡ Ω] τῇ ὑπὸ ΓΕΔ.

συντεθήσεται δὴ οὕτως· ἔστω ἡ μὲν δοθεῖσα ὑπερβολὴ ἡ ΑΓ, ἄξων δὲ ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Ε, ἡ δὲ δοθεῖσα ὀξεῖα γωνία ἡ Ω, ὁ δὲ δοθεὶς λόγος τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν ὁ αὐτὸς τῷ τῆς ΧΨ πρὸς ΧΦ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ ΨΦ κατὰ τὸ Υ, καὶ ἐκκείσθω δεδομένη εὐθεῖα ἡ ΖΘ, καὶ ἐπ' αὐτῆς γε-

14. ΑΚ] ΛΚ V; corr. p. τῷ] τόν V; corr. p. 19. ΕΓΗ] ΕΓΚ V; corr. Comm. 21. ΘΖΚ] ΖΘΚ V; corr. Comm. τουτέστιν ἡ Ω] del. Comm. ΓΕΔ] ΕΓΔ, Ε postea inserta m. 1, V; corr. Comm. 23. ΑΓ] pc, Α e corr. m. 1 V.

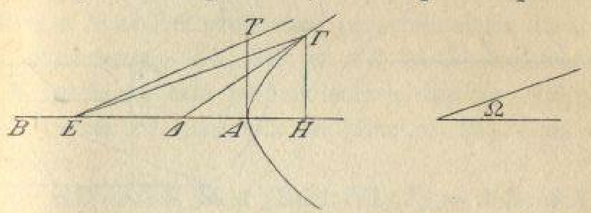
angulo Θ aequalem [prop. L], per Γ autem rectae ΑΒ parallela ducatur ΕΓ. iam quoniam est

$$\angle \Theta = \mathit{\Delta}\Delta\Gamma$$

et $\angle A\Delta\Gamma = E\Gamma\Delta$ [Eucl. I, 29], erit etiam

$$\angle \Theta = E\Gamma\Delta.$$

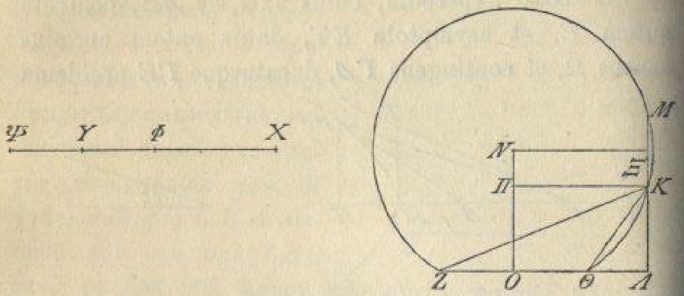
Sit sectio hyperbola, cuius axis sit ΑΒ, centrum autem Ε, et asymptota ΕΤ, datus autem angulus acutus Ω, et contingens ΓΔ, ducaturque ΓΕ problema



efficiens, et perpendicularis ducatur ΓΗ. ratio igitur lateris transuersi ad rectum data est; quare etiam ratio $EH \times H\Delta : \Gamma H^2$ data est [I, 37]. sumatur igitur data recta ΖΘ, in eaque segmentum circuli describatur angulum angulo Ω aequalem capiens [Eucl. III, 33]; erit igitur semicirculo maius [Eucl. III, 31]. et a puncto aliquo ambitus Κ perpendicularis ducatur ΚΛ rationem $Z\Lambda \times \Lambda\Theta : \Lambda K^2$ aequalem efficiens rationi lateris transuersi ad rectum, ducanturque ΖΚ, ΚΘ. iam quoniam est $\angle ZK\Theta = E\Gamma\Delta$, et ut latus transuersum ad rectum, ita et $EH \times H\Delta : H\Gamma^2$ et $Z\Lambda \times \Lambda\Theta : \Lambda K^2$, trianguli ΚΖΛ, ΕΓΗ et ΖΘΚ, ΕΓΔ similes erunt [u. Pappi lemma IX]. ergo

$$\angle \Theta Z K = \Gamma E \Delta.$$

componetur hoc modo: sit data hyperbola ΑΓ, axis autem ΑΒ, et centrum Ε, datus uero angulus acutus sit Ω, et data ratio lateris transuersi ad γράφθω τμῆμα κύκλου μεῖζον ἡμικυκλίου δεχόμενον γωνίαν τῇ Ω ἴσην, καὶ ἔστω τὸ ΖΚΘ, καὶ εἰλήφθω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Ν, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπὶ τὴν ΖΘ κάθετος ἤχθω ἡ ΝΟ, καὶ τετμήσθω ἡ ΝΟ εἰς τὸν τῆς ΥΦ πρὸς ΦΧ λόγον κατὰ τὸ Π, καὶ διὰ τοῦ



Π τῇ ΖΘ παράλληλος ἤχθω ἡ ΠΚ, καὶ ἀπὸ τοῦ Κ κάθετος ἤχθω ἡ ΚΛ ἐπὶ τὴν ΖΘ ἐκβληθεῖσαν, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΖΚ, ΚΘ, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ ΛΚ ἐπὶ τὸ Μ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ν ἐπ' αὐτὴν κάθετος ἤχθω ἡ ΝΞ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΖΘ. καὶ διὰ τοῦτό ἐστιν, ὡς ἡ ΝΠ πρὸς ΠΟ, τουτέστιν ἡ ΥΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΞΚ πρὸς ΚΛ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ ΨΦ πρὸς ΦΧ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΛ· συνθέντι, ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΜΛ πρὸς ΛΚ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ· ὡς ἄρα ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, τὸ ὑπὸ ΜΛΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ. ἀλλ' ὡς ἡ ΨΧ πρὸς ΧΦ, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν·

3. τοῦ] (alt.) pc, e corr. m. 1 V. 4. κάθετος ἤχθω] sine causa in mg. repet. m. rec. V. 6. τῇ ΖΘ et ἤχθω repet. in mg. m. rec. V. 7. ΚΛ] ΚΑ V; corr. p. 15. ΜΛΚ] ΜΑΚ V; corr. p (τῶν ΜΛ, ΛΚ).

rectum aequalis sit rationi $X\Psi : X\Phi$, seceturque in Υ in duas partes aequales $\Psi\Phi$, et sumatur data recta $Z\Theta$, in eaque segmentum circuli semicirculo maius describatur angulum angulo Ω aequalem capiens [Eucl. III, 33], sitque $ZK\Theta$, et sumatur centrum circuli N, et ab N ad $Z\Theta$ perpendicularis ducatur NO, et NO in Π secundum rationem $\Upsilon\Phi : \Phi X$ secetur, per Π autem rectae $Z\Theta$ parallela ducatur ΠK, et a K ad $Z\Theta$ productam perpendicularis ducatur $K\Lambda$, ducanturque ZK, $K\Theta$, et ΛK ad M producatur, ab N autem ad eam perpendicularis ducatur $N\Xi$; ea igitur rectae $Z\Theta$ parallela est [Eucl. I, 27]. qua de causa est

$N\Pi : \Pi O = \Xi K : K\Lambda$ [Eucl. VI, 2] $= \Upsilon\Phi : \Phi X$.

et sumptis duplis antecedentium [Eucl. V, 15] erit $\Psi\Phi : \Phi X = MK : K\Lambda$ [Eucl. III, 3]. componendo [Eucl. V, 18] $\Psi X : X\Phi = M\Lambda : \Lambda K$. uerum

$$M\Lambda : \Lambda K = M\Lambda \times \Lambda K : \Lambda K^2;$$

quare etiam

$$\Psi X : X\Phi = M\Lambda \times \Lambda K : \Lambda K^2 = Z\Lambda \times \Lambda\Theta : \Lambda K^2$$

[Eucl. III, 36]. uerum ut $\Psi X : X\Phi$, ita latus transuersum ad rectum; itaque etiam ut

$$Z\Lambda \times \Lambda\Theta : \Lambda K^2,$$

ita latus transuersum ad rectum. iam ab Λ ad ΛB perpen-

Ad figuras codicis V quod adtinet, in hyperbola praeter nostras (omissa tamen priore segmenti descriptione in analysi) duas figuras segmenti habet, alteram ita ut Π in N cadat addito ἐπὶ ἴ.... m. 1, alteram ita ut supra N cadat adscripto m. 1: ὅταν ἡ μείζων ἡ ὀρθία πλευρά; secundam nostram segmenti descriptionem bis habet et praeterea solita illa IV rectangula rectasque. omnia eadem c, in priore figura: ἐπὶ ἰσότητος δύο πλευρῶν, in altera ὅτε ἡ κτλ.

καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZΔΘ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ $Δ$ τῇ AB πρὸς ὀρθὰς ἡ $ΔT$. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ $EΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔT$, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ $ZΔΘ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$, τὸ δὲ ἀπὸ $ZΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ὑπὸ $ZΔΘ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$, καὶ τὸ ἀπὸ $ZΔ$ ἄρα πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ $EΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔT$. καί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς $Δ$, $Δ$ γωνίαι ὀρθαί· ἐλάσσων ἄρα ἐστὶν ἡ Z γωνία τῆς E. συνεστάτω οὖν τῇ ὑπὸ $ΔZK$ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ $ΔEΓ$· συμπεσεῖται ἄρα ἡ $EΓ$ τῇ τομῇ. συμπιπτέτω κατὰ τὸ $Γ$. ἤχθω δὴ ἀπὸ τοῦ $Γ$ ἐφαπτομένη ἡ $ΓΔ$, κάθετος δὲ ἡ $ΓH$· ἔσται δή, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ $EHΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓH$. καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZΔΘ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΔK$, τὸ ὑπὸ $EHΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $HΓ$· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ $KZΔ$ τρίγωνον τῷ $EΓH$ τριγώνῳ καὶ τὸ $KΘΔ$ τῷ $ΓHΔ$ καὶ τὸ $KZΘ$ τῷ $ΓEΔ$. ὥστε ἡ ὑπὸ $EΓΔ$ γωνία ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ $ZKΘ$, τουτέστι τῇ $Ω$.

ἐὰν δὲ ὁ τῆς πλαγίας πρὸς τὴν ὀρθίαν λόγος ἴσος ᾖ πρὸς ἴσον, ἡ $KΔ$ ἐφάπτεται τοῦ $ZKΘ$ κύκλου, καὶ ἡ ἀπὸ τοῦ κέντρου ἐπὶ τὸ K ἐπιζευγνυμένη παράλληλος ἔσται τῇ $ZΘ$ καὶ αὐτὴ ποιήσει τὸ πρόβλημα.

νβ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἣν ποιεῖ γωνίαν πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ, οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

1. καὶ ὡς — 2. ὀρθίαν] bis V, sed corr. 8. ZΔ] ZΔ V; corr. p. 15. πρός] (alt.) repet. mg. m. rec. V. 16. ὑπὸ ZΔΘ] $\overline{νξλθ}$ V; corr. Memus. 20. ZKΘ] ZΘK V; corr. Comm. 21. ἴσος] ἴσον Halley. 27. τῇ] τήν V; corr. p.

dicularis ducatur $ΔT$. quoniam igitur est, ut $EΔ^2 : ΔT^2$, ita latus transuersum ad rectum [prop. I], uerum etiam ut latus transuersum ad rectum, ita

$$ZΔ \times ΔΘ : ΔK^2,$$

et $ZΔ^2 : ΔK^2 > ZΔ \times ΔΘ : ΔK^2$, erit etiam

$$ZΔ^2 : ΔK^2 > EΔ^2 : ΔT^2.$$

et anguli ad $Δ$, $Δ$ positi recti sunt; itaque erit $\angle Z < E$ [u. Pappi lemma VI]. construatur igitur $\angle ΔEΓ = ΔZK$; $EΓ$ igitur cum sectione concurret [prop. II]. concurrat in $Γ$. a $Γ$ igitur contingens ducatur $ΓΔ$ [prop. XLIX], perpendicularis autem $ΓH$; erit igitur, ut latus transuersum ad rectum, ita $EH \times HΔ : ΓH^2$ [I, 37]. quare etiam

$$ZΔ \times ΔΘ : ΔK^2 = EH \times HΔ : HΓ^2.$$

itaque similes sunt trianguli $KZΔ$, $EΓH$ et $KΘΔ$, $ΓHΔ$ et $KZΘ$, $ΓEΔ$ [u. Pappi lemma IX]. ergo

$$\angle EΓΔ = ZKΘ = Ω.$$

sin ratio lateris transuersi ad rectum aequalis est ad aequale, $KΔ$ circulum $ZKΘ$ contingit [Eucl. III, 16], et recta a centro ad K ducta rectae $ZΘ$ parallela erit et ipsa problema efficiet.

LII.

Si recta ellipsim contingit, angulus, quem ad diametrum per punctum contactus ductam efficit, minor non est eo, qui deinceps est angulo a rectis ad mediam sectionem fractis comprehenso.

sit ellipsis, cuius axes sint AB, $ΓΔ$, centrum autem E, et maior axis sit AB, contingatque sectionem ἔστω ἔλλειψις, ἧς ἄξονες μὲν οἱ AB, $\Gamma\Delta$, κέντρον δὲ τὸ E, μείζων δὲ ἔστω τῶν ἀξόνων ἡ AB, καὶ ἐφαπτέσθω τῆς τομῆς ἡ $HZ\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $A\Gamma$, ΓB, ZE, καὶ ἐκβεβλήσθω ἡ $B\Gamma$ ἐπὶ τὸ Δ. λέγω, ὅτι οὐκ ἐλάσσων ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔZE γωνία τῆς ὑπὸ $\Delta\Gamma A$.

ἡ γὰρ ZE τῇ AB ἤτοι παράλληλός ἐστιν ἢ οὔ.

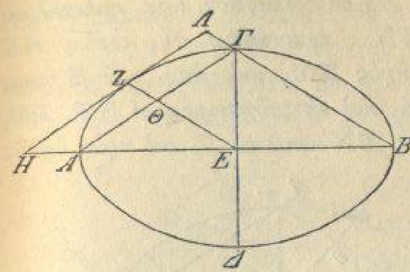
ἔστω πρότερον παράλληλος· καί ἐστιν ἴση ἡ AE τῇ EB· ἴση ἄρα καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Gamma$. καί ἐστι διάμετρος ἡ ZE· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Z ἐφαπτομένη παράλληλός ἐστι τῇ $A\Gamma$. ἔστι δὲ καὶ ἡ ZE τῇ AB παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ $Z\Theta\Gamma\Delta$, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $\Delta Z\Theta$ τῇ ὑπὸ $\Delta\Gamma\Theta$.

καὶ ἐπεὶ μείζων ἐστὶν ἑκατέρα τῶν AE, EB τῆς $E\Gamma$, ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ $A\Gamma B$· ὀξεῖα ἄρα ἡ ὑπὸ $\Delta\Gamma A$. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΔZE. καὶ διὰ τοῦτο ἀμβλεῖά ἐστιν ἡ ὑπὸ HZE.

μὴ ἔστω δὴ ἡ EZ τῇ AB παράλληλος, καὶ ἤχθω κάθετος ἡ ZK· οὐκ ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ABE τῇ ὑπὸ ZEA. ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ E ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ K ἐστιν ἴση [οὐκ ἄρα ὅμοιόν ἐστι τὸ ΓEB τρίγωνον τῷ ZEK]· οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ BE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$, τὸ ἀπὸ EK πρὸς τὸ ἀπὸ KZ. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ BE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$, τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ HKE πρὸς τὸ ἀπὸ KZ. οὐκ ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ HKE πρὸς τὸ ἀπὸ KZ, τὸ ἀπὸ KE πρὸς τὸ ἀπὸ KZ. οὐκ

2. μεῖζον V; corr. p. ἡ] ὁ p. 16. $\Delta\Gamma A$] $\Delta\Gamma\Delta$, Δ e corr. m. 1, V; corr. p. 17. HZE] ZHE V; corr. p. 18. AB] c, AA v, et fort. V, in quo α et β difficulter distinguuntur; BA p. 23. τὸ ἀπὸ EK — 24. $E\Gamma$] om. V; corr. Comm.

$HZ\Delta$, et ducantur $A\Gamma$, ΓB, ZE, et $B\Gamma$ ad Δ producatur. dico, non esse $\angle \Delta ZE < \Delta\Gamma A$.



ZE enim aut rectae AB parallela est aut non parallela.

prius sit parallela; et $AE = EB$; itaque etiam $A\Theta = \Theta\Gamma$ [Eucl. VI, 2]. et ZE diametrus est; itaque recta in Z contingens rectae $A\Gamma$ parallela est [prop. VI]. uerum etiam ZE rectae AB parallela est; $Z\Theta\Gamma\Delta$ igitur parallelogrammum est; quare $\angle \Delta Z\Theta = \Delta\Gamma\Theta$ [Eucl. I, 34].

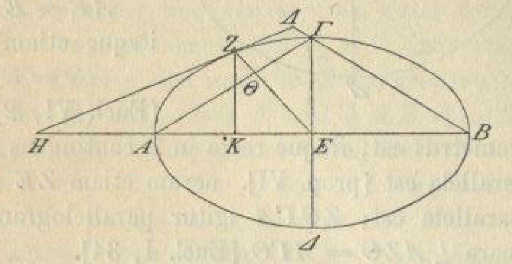
et quoniam est $AE = EB > E\Gamma$, $\angle A\Gamma B$ obtusus est [Eucl. II, 12]; itaque $\angle \Delta\Gamma A$ acutus est. quare etiam $\angle \Delta ZE$ acutus. ergo $\angle HZE$ obtusus est.

iam EZ rectae AB parallela ne sit, et perpendicularis ducatur ZK; itaque non est $\angle ABE = ZEA$. uerum angulus rectus ad E positus angulo recto ad K posito aequalis est[1]; itaque non est [u. Pappi lemma XII] $BE^2 : E\Gamma^2 = EK^2 : KZ^2$. est autem $BE^2 : E\Gamma^2 = AE \times EB : E\Gamma^2 =$ latus transuersum ad rectum [I, 21] $= HK \times KE : KZ^2$ [I, 37]. itaque non est $HK \times KE : KZ^2 = KE^2 : KZ^2$. ergo non est $HK = KE$. sumatur segmentum circuli

1) Uerba οὐκ ἄρα — ZEK lin. 21—22 falsa sunt (possunt enim esse similes) et sine dubio subditiua.

25. τὴν ὀρθίαν] repet. mg. m. rec. V. 26. οὐκ ἄρα — 27. KZ (pr.)] om. V; corr. Halley praeeunte Commandino.

ἄρα ἴση ἐστὶν ἡ ΗΚ τῇ ΚΕ. ἐκκείσθω κύκλου τμῆμα τὸ ΜΥΝ δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ ὑπὸ ΑΓΒ· ἀμβλεῖα δὲ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ· ἔλασσον ἄρα ἡμικυκλίου τμῆμά ἐστι τὸ ΜΥΝ. πεποιήσθω δή, ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ ἀπὸ τοῦ Ξ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΥΞΧ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΥ, ΥΜ, καὶ τετμήσθω δίχα ἡ ΜΝ κατὰ τὸ Τ, καὶ πρὸς ὀρθὰς



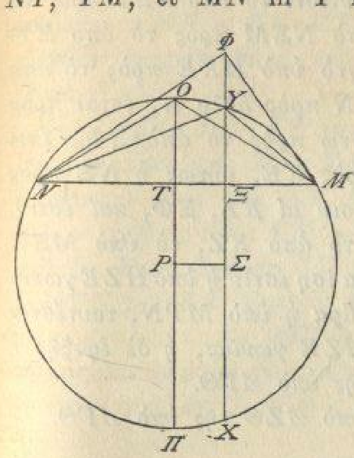
ἤχθω ἡ ΟΤΠ· διάμετρος ἄρα ἐστίν. ἔστω κέντρον τὸ Ρ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ κάθετος ἡ ΡΣ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΟΝ, ΟΜ. ἐπεὶ οὖν ἡ ὑπὸ ΜΟΝ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΑΓΒ, καὶ δίχα τέτμηται ἑκατέρα τῶν ΑΒ, ΜΝ κατὰ τα Ε, Τ, καὶ ὀρθαί εἰσιν αἱ πρὸς τοῖς Ε, Τ γωνίαι, ὅμοια ἄρα τὰ ΟΤΝ, ΒΕΓ τρίγωνα. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΤΡ τῇ ΣΞ, μείζων δὲ ἡ ΡΟ τῆς ΣΥ, ἡ ΡΟ ἄρα πρὸς ΡΤ μείζονα ἔχει λόγον ἤπερ ἡ ΥΣ πρὸς ΣΞ· καὶ ἀναστρέψαντι ἡ ΡΟ πρὸς ΟΤ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΣΥ πρὸς ΥΞ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια· ἡ ἄρα ΠΟ πρὸς ΤΟ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΥ πρὸς ΥΞ. καὶ διελόντι ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ ἐλάσ-

2. τῇ] pc, e corr. m. 1 V. 4. πεποιείσθω V; corr. pc. 6. ΥΞΧ] ΞΥΧ V; corr. p. 8. ΟΤΠ] ΤΟΠ V; corr. p. 17.

MYN angulum capiens angulo $A\Gamma B$ aequalem; $\angle A\Gamma B$ autem obtusus est; itaque segmentum MYN semicirculo minus est [Eucl. III, 31]. fiat igitur

$$N\Xi : \Xi M = HK : KE,$$

et ab Ξ perpendicularis ducatur $Y\Xi X$, ducanturque NY, YM, et MN in T in duas partes aequales



secetur, et perpendicularis ducatur $OT\Pi$; ea igitur diametrus est [Eucl. III, 1 coroll.]. sit P centrum, ab eoque perpendicularis $P\Sigma$, et ducantur ON, OM. quoniam igitur est

$$\angle MON = A\Gamma B,$$

et utraque AB, MN in E, T in binas partes aequales secta est, et anguli ad E, T positi recti sunt, trianguli OTN, $BE\Gamma$ similes sunt. erit igitur

$$TN^2 : TO^2 = BE^2 : E\Gamma^2 \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

et quoniam est $TP = \Sigma\Xi$ [Eucl. I, 34], et $PO > \Sigma Y$ [Eucl. III, 15], erit $PO : PT > Y\Sigma : \Sigma\Xi$ [Eucl. V, 8]. et conuertendo $PO : OT < \Sigma Y : Y\Xi$. et sumptis antecedentium duplis [Eucl. V, 15] erit

$$\Pi O : TO < XY : Y\Xi.$$

et dirimendo $\Pi T : TO < X\Xi : Y\Xi$. est autem

Praeter has figuras V duas alias habet his similes.

ἔχει λόγον] c, λόγον V, λόγον ἔχει p. 20. TO] τὸ $\overline{οτ}$ V; (in τὸ des. fol. 90ᵛ); corr. Halley. 21. TO] τὸ $\overline{το}$ V; corr. p.

σονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΥΞ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΠΤ πρὸς ΤΟ, τὸ ἀπὸ ΤΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΤΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΓ καὶ ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ ἐλάσσονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΧΞ πρὸς ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΧΞΥ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΝΞΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΥ. ἐὰν ἄρα ποιήσωμεν, ὡς τὸ ὑπὸ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς ἄλλο τι, ἔσται πρὸς μεῖζον τοῦ ἀπὸ ΞΥ. ἔστω πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΗΚ πρὸς ΚΕ, οὕτως ἡ ΝΞ πρὸς ΞΜ, καὶ πρὸς ὀρθάς εἰσιν αἱ ΚΖ, ΞΦ, καί ἐστιν, ὡς τὸ ὑπὶ ΗΚΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΖ, τὸ ὑπὸ ΜΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΦ, διὰ ταῦτα ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΖΕ γωνία τῇ ὑπὸ ΜΦΝ. μείζων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΥΝ, τουτέστιν ἡ ὑπὸ ΑΓΒ, τῆς ὑπὸ ΗΖΕ γωνίας, ἡ δὲ ἐφεξῆς ἡ ὑπὸ ΑΖΘ μείζων ἐστὶ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ.

οὐκ ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΑΖΘ τῆς ὑπὸ ΑΓΘ.

νγ'.

Τῆς δοθείσης ἐλλείψεως ἐφαπτομένην ἀγαγεῖν, ἥτις πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ γωνίαν ποιήσει ἴσην τῇ δοθείσῃ ὀξείᾳ· δεῖ δὴ τὴν διδομένην ὀξεῖαν γωνίαν μὴ ἐλάσσονα εἶναι τῆς ἐφεξῆς τῇ περιεχομένῃ ὑπὸ τῶν πρὸς μέσην τὴν τομὴν κλωμένων εὐθειῶν.

ἔστω ἡ δοθεῖσα ἔλλειψις, ἧς μείζων μὲν ἄξων ὁ ΑΒ, ἐλάσσων δὲ ὁ ΓΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΓ, ΓΒ, ἡ δὲ δοθεῖσα γωνία ἔστω ἡ

1. ΧΞ] pc, corr. ex ΧΥ m. 1 V. 7. ΝΞΜ] c, Ξ corr. ex Γ m. 1 V. 9. ΜΞΝ] ΜΝΞ V; corr. p (τῶν ΝΞ, ΞΜ).

$\Pi T : TO = TN^2 : TO^2$ [Eucl. VI, 8 coroll.; VI, 19 coroll.] $= BE^2 : E\Gamma^2 =$ latus transuersum ad rectum [I, 21] $=$ $HK \times KE : KZ^2$ [I, 37]. itaque

$$HK \times KE : KZ^2 < X\Xi : \Xi\Upsilon,$$

hoc est $< X\Xi \times \Xi\Upsilon : \Xi\Upsilon^2$, hoc est [Eucl. III, 35] $HK \times KE : KZ^2 < N\Xi \times \Xi M : \Xi\Upsilon^2$. itaque si fecerimus, ut $HK \times KE : KZ^2$, ita $M\Xi \times \Xi N$ ad aliam aliquam magnitudinem, erit ad maiorem quam $\Xi\Upsilon^2$ [Eucl. V, 10]. sit

$$HK \times KE : KZ^2 = M\Xi \times \Xi N : \Xi\Phi^2.$$

iam quoniam est $HK : KE = N\Xi : \Xi M$, perpendicularesque sunt KZ, $\Xi\Psi$, et est

$$HK \times KE : KZ^2 = M\Xi \times \Xi N : \Xi\Phi^2,$$

erit [u. Pappi lemma XI] $\angle HZE = M\Phi N$. itaque $\angle M\Upsilon N > HZE$ [Eucl. I, 21], hoc est

$$\angle A\Gamma B > HZE,$$

et angulus deinceps positus $AZ\Theta > A\Gamma\Theta$ [Eucl. I, 13].

ergo non est $\angle AZ\Theta < A\Gamma\Theta$.

LIII.

Datam ellipsim contingentem rectam ducere, quae ad diametrum per punctum contactus ductam angulum efficiat aequalem dato angulo acuto; oportet igitur, datum angulum acutum non minorem esse angulo, qui deinceps positus est angulo rectis ad mediam sectionem fractis comprehenso [prop. LII].

sit data ellipsis, cuius maior axis sit AB, minor autem $\Gamma\Delta$, et centrum E, ducanturque $A\Gamma$, ΓB,

13. KZ] pc, corr. ex KH m. 1 V. $M\Xi N$] $MN\Xi$ V; τῶν $N\Xi$, ΞM p. 14. ἴση] om. V; correxi cum Memo. 16. HZE] p, H postea ins. m. 1 V; e corr. c. 19. νγ'] ξγ' m. rec. V

Υ οὐκ ἐλάσσων τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΒ οὐκ ἐλάσσων ἐστὶ τῆς Χ.

ἡ Υ ἄρα τῆς ὑπὸ ΑΓΗ ἢ μείζων ἐστὶν ἢ ἴση.

ἔστω πρότερον ἴση· καὶ διὰ τοῦ Ε τῇ ΒΓ παράλληλος ἤχθω ἡ ΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ, καί ἐστιν, ὡς ἡ ΑΕ πρὸς ΕΒ, ἡ ΑΖ πρὸς ΖΓ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΓΖ. καί ἐστι διάμετρος ἡ ΚΕ· ἡ ἄρα κατὰ τὸ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς, τουτέστιν ἡ ΘΚΗ, παράλληλός ἐστι τῇ ΓΑ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΗΒ παράλληλος· παραλληλόγραμμον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΖΓΗ· καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΗΚΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΗΓΖ γωνίᾳ. ἡ δὲ ὑπὸ ΗΓΖ τῇ δοθείσῃ, τουτέστι τῇ Υ, ἴση ἐστί· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΚΕ ἄρα ἐστὶν ἴση τῇ Υ.

ἔστω δὴ μείζων ἡ Υ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΗ· ἀνάπαλιν δὴ ἡ Χ τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν.

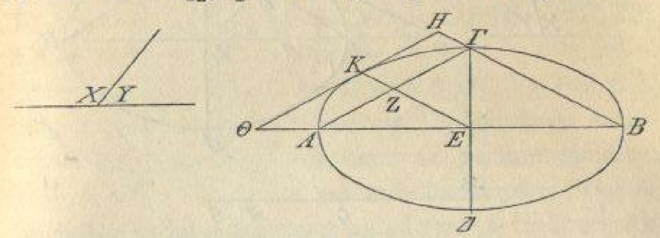
ἐκκείσθω κύκλος, καὶ ἀφῃρήσθω ἀπ' αὐτοῦ τμῆμα, καὶ ἔστω τὸ ΜΝΠ, δεχόμενον γωνίαν ἴσην τῇ Χ, καὶ τετμήσθω ἡ ΜΠ δίχα κατὰ τὸ Ο, καὶ ἀπὸ τοῦ Ο τῇ ΜΠ πρὸς ὀρθὰς ἤχθω ἡ ΝΟΡ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΝΜ, ΝΠ· ἡ ἄρα ὑπὸ ΜΝΠ γωνία τῆς ὑπὸ ΑΓΒ ἐλάσσων ἐστίν. ἀλλὰ τῆς μὲν ὑπὸ ΜΝΠ ἡμίσειά ἐστιν ἡ ὑπὸ ΜΝΟ, τῆς δὲ ὑπὸ ΑΓΒ ἡ ὑπὸ ΑΓΕ· ἐλάσσων ἄρα ἡ ὑπὸ ΜΝΟ τῆς ὑπὸ ΑΓΕ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Ε, Ο· ἡ ἄρα ΑΕ πρὸς ΕΓ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΟΜ πρὸς ΟΝ. ὥστε καὶ τὸ ἀπὸ

---

1. ὥστε] pc, ω e corr. m. 1 V. 8. τῇ ΓΖ] om. V; corr. p (τῇ ΖΓ). 13. ΗΓΖ] (pr.) pc, Γ corr. ex Κ m. 1 V. 14. ἐστίν] c, ἐστί V. 19. τὸ ΜΝΠ] τομὴ π̄ V; corr. p. 24. ΜΝΟ] pc, Ο e corr. m. 1 V.

datus autem angulus sit Υ non minor angulo $A\Gamma H$; quare etiam $\angle A\Gamma B$ angulo X minor non est [Eucl. I, 13]. erit igitur aut $\angle \Upsilon > A\Gamma H$ aut $\Upsilon = A\Gamma H$.

prius sit $\Upsilon = A\Gamma H$; et per E rectae $B\Gamma$ parallela ducatur EK, per K autem sectionem contingens ducatur $K\Theta$ [prop. XLIX]. quoniam igitur est



$AE = EB$, et $AE : EB = AZ : Z\Gamma$ [Eucl. VI, 2], erit etiam $AZ = \Gamma Z$ [Eucl. V, 16, 14]. et KE diametrus est; itaque recta in K contingens, hoc est ΘKH, rectae ΓA parallela est [prop. VI]. uerum etiam EK rectae HB parallela est; itaque $KZ\Gamma H$ parallelogrammum est; et ea de causa $\angle HKZ = H\Gamma Z$ [Eucl. I, 34]. est autem $H\Gamma Z = \Upsilon$. ergo etiam $\angle HKE = \Upsilon$.

iam uero sit $\Upsilon > A\Gamma H$; e contrario igitur [Eucl. I, 13] $\angle X < A\Gamma B$.

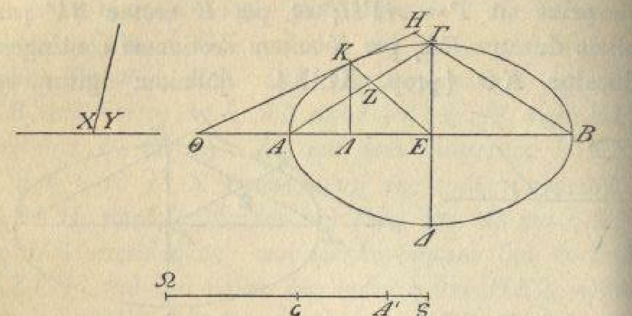
sumatur circulus, ab eoque abscindatur segmentum, quod sit $MN\Pi$, angulum capiens angulo X aequalem [Eucl. III, 33], et $M\Pi$ in O in duas partes aequales secetur, ab O autem ad $M\Pi$ perpendicularis ducatur NOP, ducanturque NM, $N\Pi$; erit igitur

$$\angle MN\Pi < A\Gamma B.$$

est autem $MNO = \frac{1}{2} MN\Pi$ et $A\Gamma E = \frac{1}{2} A\Gamma B$

Hanc figuram om. V.

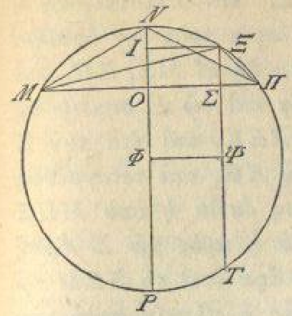
τῆς AE πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς $E\Gamma$ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ τὸ ἀπὸ MO πρὸς τὸ ἀπὸ NO. ἀλλὰ τὸ μὲν ἀπὸ AE ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ AEB, τὸ δὲ ἀπὸ MO ἴσον τῷ ὑπὸ



$MO\Pi$, τουτέστι τῷ ὑπὸ NOP· τὸ ἄρα ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Gamma$, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ PO πρὸς ON. γενέσθω δή, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ $\Omega A'$ πρὸς A'ϛ, καὶ δίχα τετμήσθω ἡ Ωϛ κατὰ το ϙ. ἐπεὶ οὖν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ PO πρὸς ON, καὶ ἡ $\Omega A'$ πρὸς A'ϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ PO πρὸς ON. καὶ συνθέντι ἡ Ωϛ πρὸς τὴν ϛA' μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ PN πρὸς NO. ἔστω τὸ κέντρον τοῦ κύκλου τὸ Φ· ὥστε καὶ ἡ ϙϛ πρὸς ϛA' μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦN πρὸς NO. καὶ διελόντι ἡ A'ϙ πρὸς A'ϛ μείζονα λόγον ἔχει ἤπερ ἡ ΦO πρὸς ON. γινέσθω δή, ὡς ἡ A'ϙ πρὸς A'ϛ, οὕτως ἡ ΦO πρὸς ἐλάττονα τῆς ON, οἷον τὴν IO, καὶ παράλληλος ἤχθω ἡ $I\Xi$ καὶ ἡ ΞT καὶ ἡ $\Phi\Psi$. ἔσται ἄρα, ὡς ἡ A'ϙ πρὸς A'ϛ, ἡ ΦO πρὸς OI καὶ ἡ $\Psi\Sigma$

7. $\Omega A'$] $\overline{\omega,\alpha}$ V, et sic deinceps. ϙ saepe litterae ϛ similis est in V. 10. $\Omega A'$] $\overline{o,\alpha}$ V; corr. p. A'ϛ] $\overline{\alpha\text{ϛ}}$ V; corr. p.

[Eucl. I, 4]; itaque $MNO < A\Gamma E$. et anguli ad E, O positi recti sunt; itaque $AE : E\Gamma > OM : ON$ [u. Pappi lemma V]. quare etiam



$AE^2 : E\Gamma^2 > MO^2 : NO^2$. est autem $AE^2 = AE \times EB$ et

$$MO^2 = MO \times O\Pi$$
$$= NO \times OP \text{ [Eucl. III, 35].}$$

itaque

$$AE \times EB : E\Gamma^2 > PO : ON,$$

hoc est [I, 21] latus transuersum ad rectum maiorem rationem habet quam $PO : ON$. fiat igitur, ut latus transuersum ad rectum, ita $\Omega A' : A'$ϛ, seceturque Ωϛ in ϙ in duas partes aequales. iam quoniam latus transuersum ad rectum maiorem rationem habet quam $PO : ON$, erit etiam

$$\Omega A' : A'\text{ϛ} > PO : ON.$$

et componendo

$$\Omega\text{ϛ} : \text{ϛ}A' > PN : NO.$$

sit Φ centrum circuli; itaque etiam

$$\text{ϙϛ} : \text{ϛ}A' > \Phi N : NO.$$

et dirimendo $A'\text{ϙ} : A'\text{ϛ} > \Phi O : ON$. fiat igitur

$$A'\text{ϙ} : A'\text{ϛ} = \Phi O : IO,$$

quae minor est quam ON [Eucl. V, 8], ducanturque parallelae $I\Xi$, ΞT, $\Phi\Psi$. erit igitur

$$A'\text{ϙ} : A'\text{ϛ} = \Phi O : OI = \Psi\Sigma : \Sigma\Xi \text{ [Eucl. I, 34];}$$

et componendo $\text{ϙϛ} : \text{ϛ}A' = \Psi\Xi : \Xi\Sigma$ [Eucl. V, 18].

In his figuris om. V angulos X, T et rectam Ωϛ.

13. ὥστε] bis V (in alt. ω corr. ex κ m. 1); corr. pvc. 16. A'ϛ] $\overline{\alpha\text{ϛ}}$ V; corr. p. 19. A'ϛ] $\overline{\alpha\text{ϛ}}$ V; corr. p.

πρὸς ΣΞ· καὶ συνθέντι, ὡς ἡ Ϙϛ πρὸς ϛΑ', ἡ ΦΞ πρὸς ΞΣ. καὶ τῶν ἡγουμένων τὰ διπλάσια, ὡς ἡ Ωϛ πρὸς ϛΑ', ἡ ΤΞ πρὸς ΞΣ. καὶ διελόντι, ὡς ἡ ΩΑ' πρὸς Α'ϛ, τουτέστιν ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ. ἐπεζεύχθωσαν δὴ αἱ ΜΞ, ΞΠ, καὶ συνεστάτω πρὸς τῇ ΑΕ εὐθείᾳ καὶ τῷ Ε σημείῳ τῇ ὑπὸ ΜΠΞ γωνίᾳ ἴση ἡ ὑπὸ ΑΕΚ, καὶ διὰ τοῦ Κ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἤχθω ἡ ΚΘ, καὶ τεταγμένως κατήχθω ἡ ΚΛ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΠΞ γωνία τῇ ὑπὸ ΑΕΚ, ὀρθὴ δὲ ἡ πρὸς τῷ Σ ὀρθῇ τῇ πρὸς τῷ Λ ἴσῃ, ἰσογώνιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΞΣΠ τῷ ΚΕΛ τριγώνῳ. καί ἐστιν, ὡς ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ ΤΣ πρὸς ΣΞ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΤΣΞ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΜΣΠ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΣ· ὅμοιον ἄρα ἐστὶ τὸ ΚΛΕ τρίγωνον τῷ ΣΞΠ τριγώνῳ καὶ τῷ ΚΘΕ τὸ ΜΞΠ, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΜΞΠ γωνία τῇ ὑπὸ ΘΚΕ. ἡ δὲ ὑπὸ ΜΞΠ τῇ ὑπὸ ΜΝΠ ἐστιν ἴση, τουτέστι τῇ Χ· καὶ ἡ ὑπὸ ΘΚΕ ἄρα τῇ Χ ἐστιν ἴση. καὶ ἡ ἐφεξῆς ἄρα ἡ ὑπὸ ΗΚΕ τῇ ἐφεξῆς τῇ Υ ἐστιν ἴση.

διῆκται ἄρα τῆς τομῆς ἐφαπτομένη ἡ ΗΘ πρὸς τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ τῇ ΚΕ γωνίαν ποιοῦσα τὴν ὑπὸ ΗΚΕ ἴσην τῇ δοθείσῃ τῇ Υ· ὅπερ ἔδει ποιῆσαι.

---

1. ΣΞ] in ras. p, ΕΞ V. ἡ] (pr.) om. V; corr. p. ϛΑ'] $\overline{\text{ϛα}}$ c et corr. ex ϛ' $\bar{\alpha}$ m. 1 V; corr. Memus; Ϙα p. Α et Α' (α) inter se simillimas hab. V. 5. ΣΞ] e corr. p, ΣΖ V. 6. καί] om. V; corr. p. 7. ΑΕΚ] ΕΑΚ V; corr. p. 10. τῇ] pvc, τ euan. in V. τῷ] τό V; corr. p. Σ] Κ V; corr. p. 11. τῷ] (pr.) τό V; corr. p. τῷ ΚΕΛ] mg. repet. m. rec. V. 13. τουτέστι — 14. ΞΣ (pr.)] bis V (altero loco ΤΣΖ pro ΤΣΞ); corr. p. 20. Υ] $\bar{\text{ϙ}}$ V, ut lin. 23. 23. Ante ἴσην del. γωνίαν m. 1 V (om. pcv). ὅπερ ἔδει ποιῆσαι]

et sumptis duplis antecedentium [Eucl. V, 15]

$$\Omega ϛ : ϛ A' = T\Xi : \Xi\Sigma \text{ [Eucl. III, 3].}$$

et dirimendo [Eucl. V, 17] $\Omega A' : A'ϛ = T\Sigma : \Sigma\Xi =$ latus transuersum ad rectum. iam ducantur $M\Xi$, $\Xi\Pi$, et ad AE rectam punctumque eius E construatur $\angle AEK = M\Pi\Xi$ [Eucl. I, 23], per K autem sectionem contingens ducatur $K\Theta$ [prop XLIX], et ordinate ducatur $K\Lambda$. iam quoniam est $\angle M\Pi\Xi = AEK$, et rectus angulus ad Σ positus recto angulo ad Λ posito aequalis, aequianguli sunt trianguli $\Xi\Sigma\Pi$, $KE\Lambda$. est autem, ut latus transuersum ad rectum, ita

$$T\Sigma : \Sigma\Xi = T\Sigma \times \Sigma\Xi : \Xi\Sigma^2 = \text{[Eucl. III, 35]}$$
$$M\Sigma \times \Sigma\Pi : \Xi\Sigma^2.$$

itaque[1]) trianguli $K\Lambda E$, $\Sigma\Xi\Pi$ et $K\Theta E$, $M\Xi\Pi$ similes sunt; quare erit $\angle M\Xi\Pi = \Theta KE$. est autem

$$\angle M\Xi\Pi = MN\Pi \text{ [Eucl. III, 21]} = X;$$

itaque etiam $\angle \Theta KE = X$. ergo etiam anguli iis deinceps positi aequales sunt [Eucl. I, 13] $HKE = \Upsilon$.

ergo sectionem contingens ducta est $H\Theta$ ad diametrum per punctum contactus ductam KE angulum efficiens HKE dato angulo Υ aequalem; quod oportebat fieri.

---

1) E lemmate XI Pappi; nam ut latus transuersum ad rectum, ita $\Theta\Lambda \times \Lambda E : K\Lambda^2$ (I, 37).

---

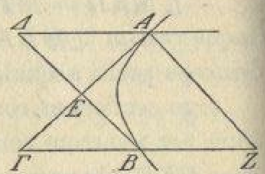
om. p. In fine (fol. 92v; fol. 93r occupant figurae huius prop.): ἐνταῦθα δοκεῖ εἶναι τέλος τοῦ δευτέρου τῶν κωνικῶν Ἀπολλωνίου m. 2 V.

ΚΩΝΙΚΩΝ γʹ.

αʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα κατὰ κορυφὴν τρίγωνα.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, καὶ τῆς AB ἐφαπτέσθωσαν ἥ τε $A\Gamma$ καὶ ἡ $B\Delta$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ E, καὶ ἤχθωσαν διὰ τῶν A, B διάμετροι τῆς τομῆς αἱ ΓB, ΔA συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις κατὰ τὰ Γ, Δ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον τῷ $EB\Gamma$.



ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ A παρὰ τὴν $B\Delta$ ἡ AZ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται. ἔσται δὴ ἐπὶ μὲν τῆς παραβολῆς ἴσον τὸ $A\Delta BZ$ παραλληλόγραμμον τῷ $A\Gamma Z$ τριγώνῳ, καὶ κοινοῦ ἀφαιρουμένου τοῦ $AEBZ$ λοιπὸν τὸ $A\Delta E$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓBE τριγώνῳ.

ἐπὶ δὲ τῶν λοιπῶν συμπιπτέτωσαν αἱ διάμετροι κατὰ τὸ H κέντρον.

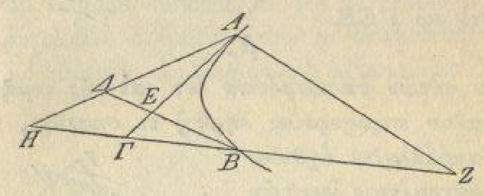
Titulum non habet V, in quo liber incipit fol. 93^{v}; Ἀπολλωνίου τοῦ Περγαίου κωνικῶν τρίτον p. 1. αʹ] m. rec. V, ut semper deinceps. 16. $A\Delta BZ$] $AB\Delta Z$ V; corr. Halley.

CONICORUM LIBER III.

I.

Si rectae coni sectionem uel circuli ambitum contingentes inter se concurrunt, et per puncta contactus diametri ducuntur cum contingentibus concurrentes, trianguli ita orti, qui ad uerticem inter se positi sunt, aequales erunt.

sit AB coni sectio uel ambitus circuli, et lineam AB contingant $A\Gamma$, $B\Delta$ in E concurrentes, per A,



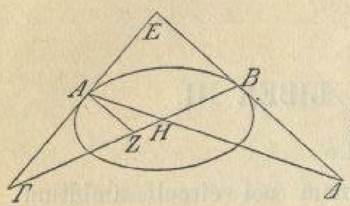
B autem diametri sectionis ducantur ΓB, ΔA cum contingentibus in Γ, Δ concurrentes. dico, esse

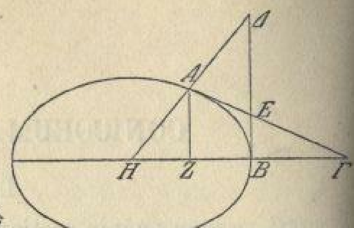
$$A\Delta E = EB\Gamma.$$

ducatur enim ab A rectae $B\Delta$ parallela AZ; ordinate igitur ducta est [I def. 5]. in parabola igitur erit [I, 42] $A\Delta BZ = A\Gamma Z$, et ablato, quod commune est, $AEBZ$ reliquum erit $A\Delta E = \Gamma BE$.

in reliquis autem diametri in H centro concurrant.

ἐπεὶ οὖν κατῆκται ἡ AZ, καὶ ἐφάπτεται ἡ $A\Gamma$, τὸ ὑπὸ $ZH\Gamma$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ BH. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ZH πρὸς HB, ἡ BH πρὸς $H\Gamma$· καὶ ὡς ἄρα ἡ

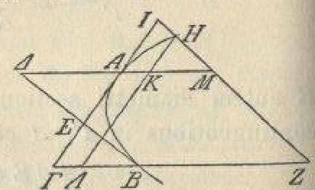




ZH πρὸς $H\Gamma$, τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ HB. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ZH πρὸς τὸ ἀπὸ HB, τὸ AHZ πρὸς τὸ ΔHB, ὡς δὲ ἡ ZH πρὸς $H\Gamma$, τὸ AHZ πρὸς $AH\Gamma$· καὶ ὡς ἄρα τὸ AHZ πρὸς τὸ $AH\Gamma$, τὸ AHZ πρὸς ΔHB. ἴσον ἄρα τὸ $AH\Gamma$ τῷ ΔHB. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ $\Delta H\Gamma E$· λοιπὸν ἄρα τὸ $AE\Delta$ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ ΓEB.

β'.

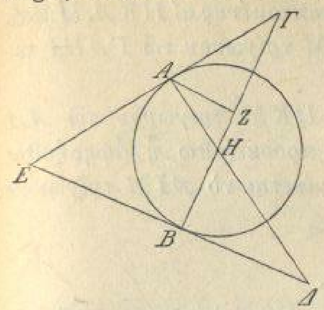
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς τοῦ κύκλου περιφερείας ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ δι' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον τετράπλευρον πρός τε μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.



ἔστω γὰρ κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB

5. ὡς] pc, corr. ex ὁ m. 1 V.

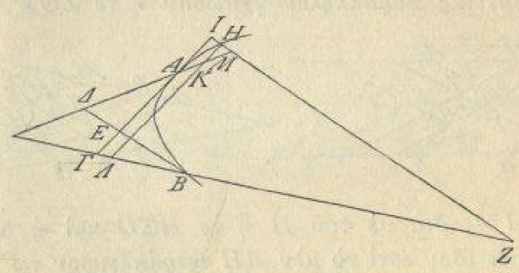
iam quoniam AZ ordinate ducta est, et $A\Gamma$ contingit, erit $ZH \times H\Gamma = BH^2$ [I, 37]. itaque



$ZH : HB = BH : H\Gamma$ [Eucl. VI, 17]; quare etiam $ZH : H\Gamma = ZH^2 : HB^2$ [Eucl. V def. 9]. est autem $ZH^2 : HB^2 = AHZ : \Delta HB$ [Eucl. VI, 19], et $ZH : H\Gamma = AHZ : AH\Gamma$ [Eucl. VI, 1]. quare etiam $AHZ : AH\Gamma = AHZ : \Delta HB$. itaque $AH\Gamma = \Delta HB$ [Eucl. V, 9]. auferatur, quod commune est, $\Delta H\Gamma E$; reliquum igitur $AE\Delta = \Gamma EB$.

II.

Iisdem suppositis si in sectione uel ambitu circuli punctum aliquod sumitur, et per id rectae contingentibus parallelae ducuntur usque ad diametros, quadrangulus ad alteram contingentium alteramque diametro-



rum ortus aequalis erit triangulo ad eandem contingentem alteramque diametrum orto.

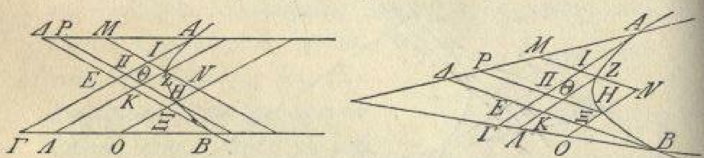
sit enim AB coni sectio uel ambitus circuli contingentesque $AE\Gamma$, $BE\Delta$, diametri autem $A\Delta$, $B\Gamma$, *καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕΓ, ΒΕΔ, διάμετροι δὲ αἱ ΑΔ, ΒΓ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ ἤχθωσαν παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΗΚΛ, ΗΜΖ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΙΜ τρίγωνον τῷ ΓΛΗΙ τετραπλεύρῳ.*

ἐπεὶ γὰρ δέδεικται τὸ ΗΚΜ τρίγωνον τῷ ΑΛ τετραπλεύρῳ ἴσον, κοινὸν προσκείσθω ἢ ἀφῃρήσθω τὸ ΙΚ τετράπλευρον, καὶ γίνεται τὸ ΑΙΜ τρίγωνον ἴσον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ.

γ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς ἢ τῆς περιφερείας β σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τα γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

ἔστω γὰρ ἡ τομὴ καὶ αἱ ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ διάμετροι, ὡς προείρηται, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα τὰ Ζ, Η, καὶ διὰ μὲν τοῦ Ζ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν ἥ τε ΖΘΚΛ καὶ

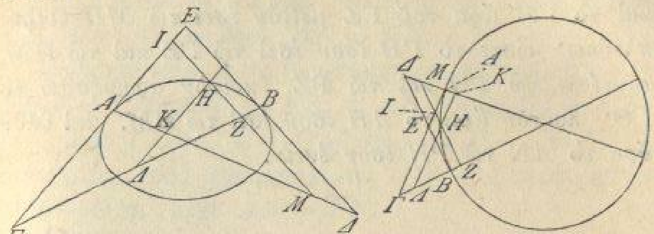


ἡ ΝΖΙΜ, διὰ δὲ τοῦ Η ἥ τε ΗΞΟ καὶ ἡ ΘΠΡ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ μὲν ΛΗ τετράπλευρον τῷ ΜΘ, τὸ δὲ ΛΝ τῷ ΡΝ.

---

4. *ΓΛΗΙ*] V?, p; *ΓΛΗ* c, et v, sed corr. m. 2. V in prop. II quinque praeterea figg. habet.

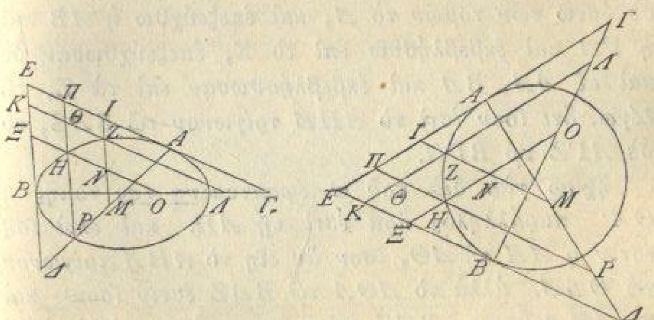
et sumatur in sectione punctum aliquod *H*, ducanturque contingentibus parallelae *HKΛ*, *HMZ*. dico, esse *AIM* = *ΓΛHI*.



nam quoniam demonstratum est [I, 42—43], esse *HKM* = *AΛ*, commune adiiciatur uel auferatur quadrangulus *IK*. tum erit *AIM* = *ΓH*.

III.

Iisdem suppositis si in sectione uel ambitu circuli duo puncta sumuntur, et per ea rectae contingentibus parallelae usque ad diametros ducuntur, quadranguli



rectis ita ductis effecti et in diametris collocati inter se aequales erunt.

sit enim sectio et contingentes et diametri, sicut ἐπεὶ γὰρ προδέδεικται ἴσον τὸ ΡΠΑ τρίγωνον τῷ ΓΗ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ ΑΜΙ τῷ ΓΖ, τὸ δὲ ΑΡΠ τοῦ ΑΜΙ μεῖζόν ἐστι τῷ ΠΜ τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ ΓΗ ἄρα τοῦ ΓΖ μεῖζόν ἐστι τῷ ΜΠ τετραπλεύρῳ· ὥστε τὸ ΓΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΓΖ καὶ τῷ ΠΜ, τουτέστι τῷ ΓΘ καὶ τῷ ΡΖ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΓΘ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΛΗ ἴσον ἐστὶ τῷ ΘΜ. καὶ ὅλον ἄρα τὸ ΛΝ τῷ ΡΝ ἴσον ἐστίν.

δ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, ἀχθῶσι δὲ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι συμπίπτουσαι ταῖς ἐφαπτομέναις, ἴσα ἔσται τὰ πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις τρίγωνα.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, αἱ δὲ ἐφαπτόμεναι αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΓ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Γ, κέντρον δὲ ἔστω τῶν τομῶν τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Ε, ἐπεζεύχθωσαν δὲ καὶ αἱ ΔΑ, ΒΔ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Ζ, Η. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΒΔΖ, τὸ δὲ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΘΛ· παράλληλος ἄρα ἐστὶ τῇ ΑΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΑΔ τῇ ΔΘ, ἴσον ἂν εἴη τὸ ΑΗΔ τρίγωνον τῷ ΘΛΔ. ἀλλὰ τὸ ΔΘΛ τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον· καὶ τὸ ΑΗΔ ἄρα τῷ ΒΔΖ ἐστιν ἴσον. ὥστε καὶ τὸ ΑΓΖ τῷ ΒΓΗ ἴσον.

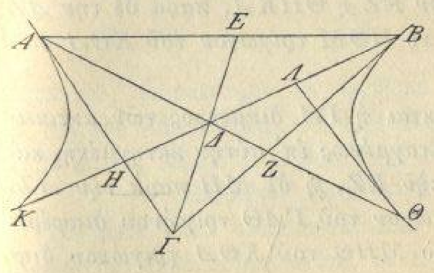
antea diximus, sumantur autem in sectione duo quaelibet puncta Z, H, et per Z contingentibus parallelae ducantur $Z\Theta K\Lambda$, $NZIM$, per H autem $H\Xi O$, $\Theta\Pi P$. dico, esse $\Lambda H = M\Theta$, $\Lambda N = PN$.

quoniam enim antea demonstrauimus [prop. II], esse $P\Pi A = \Gamma H$, $AMI = \Gamma Z$, et $AP\Pi = AMI + \Pi M$, erit etiam $\Gamma H = \Gamma Z + \Pi M$. itaque $\Gamma H = \Gamma\Theta + PZ$. auferatur, quod commune est, $\Gamma\Theta$; reliquum igitur $\Lambda H = \Theta M$. ergo $\Lambda N = PN$.

IV.

Si duae rectae sectiones oppositas contingentes inter se concurrunt, et per puncta contactus diametri ducuntur cum contingentibus concurrentes, trianguli ad contingentes positi aequales erunt.

sint A, B sectiones oppositae, easque contingentes $A\Gamma$, $B\Gamma$ in Γ concurrant, centrum autem sectionum sit Δ, ducaturque AB et $\Gamma\Delta$, quae ad E producatur, et ducantur etiam ΔA, $B\Delta$ producanturque ad Z, H. dico, esse



$$AH\Delta = B\Delta Z$$

et $A\Gamma Z = B\Gamma H$.

per Θ enim sectionem contingens ducatur $\Theta\Lambda$; ea igitur rectae AH parallela est [Eutocius ad I, 44]. et quoniam est [I, 30] $A\Delta = \Delta\Theta$, erit $AH\Delta = \Theta\Lambda\Delta$ [Eucl. VI, 19]. est autem $\Delta\Theta\Lambda = B\Delta Z$ [prop. I]; quare etiam $AH\Delta = B\Delta Z$. ergo etiam $A\Gamma Z = B\Gamma H$.

ε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ διαμέτρῳ τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων διαφέρει τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἀγομένῃ διαμέτρῳ.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΕΔ, ΔΖ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Δ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ καὶ ἡ ΓΔ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ αἱ ΖΓ, ΕΓ ἐπιζευχθεῖσαι ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν ΕΖ ἡ ΘΗΚΛ, παρὰ δὲ τὴν ΔΖ ἡ ΗΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΗΘΜ τρίγωνον τοῦ ΚΘΔ διαφέρει τῷ ΚΛΖ.

ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἡ ΓΔ διάμετρος τῶν ἀντικειμένων, ἡ δὲ ΕΖ τεταγμένως ἐπ' αὐτὴν κατηγμένη, καὶ ἡ μὲν ΗΘ παρὰ τὴν ΕΖ, ἡ δὲ ΜΗ παρὰ τὴν ΔΖ, τὸ ἄρα ΜΗΘ τρίγωνον τοῦ ΓΛΘ τριγώνου διαφέρει τῷ ΓΔΖ. ὥστε τὸ ΜΗΘ τοῦ ΚΘΔ τριγώνου διαφέρει τῷ ΚΖΛ.

καὶ φανερόν, ὅτι ἴσον γίνεται τὸ ΚΖΛ τρίγωνον τῷ ΜΗΚΔ τετραπλεύρῳ.

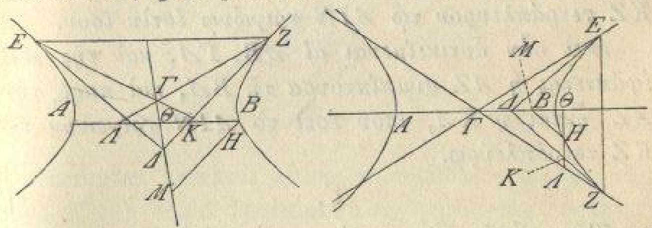
---

3. συμπίπτουσι V; corr. pc. 17. ΘΗΚΛ] V; ΗΘΚΛ p.

V.

Si duae rectae oppositas contingentes inter se concurrunt, et in utraque sectione punctum aliquod sumitur, ab eoque duae rectae ducuntur altera contingenti parallela, altera rectae puncta contactus coniungenti parallela, triangulus ab iis ad diametrum per punctum concursus ductam effectus a triangulo ad punctum concursus contingentium absciso differt triangulo ad contingentem diametrumque per punctum contactus ductam absciso.

sint oppositae A, B, quarum centrum sit Γ, et contingentes $E\Delta$, ΔZ in Δ concurrant, ducaturque EZ et $\Gamma\Delta$, quae producatur, et $Z\Gamma$, $E\Gamma$ ductae pro-



ducantur, sumaturque in sectione punctum aliquod H, et per id ducatur $\Theta HK\Lambda$ rectae EZ parallela, HM autem rectae ΔZ parallela. dico, esse

$$H\Theta M = K\Theta\Delta + K\Lambda Z.$$

quoniam enim demonstrauimus [II, 39 et 38], $\Gamma\Delta$ diametrum esse oppositarum, et EZ ad eam ordinate ducta est, et $H\Theta$ rectae EZ parallela, MH autem rectae ΔZ parallela, erit [I, 45]

$$MH\Theta = \Gamma\Lambda\Theta + \Gamma\Delta Z.$$

ergo $MH\Theta = K\Theta\Delta + KZ\Lambda$.

et manifestum est, esse $KZ\Lambda = MHK\Delta$.

ϛ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀντικειμένων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρον πρὸς τῇ μιᾷ τῶν ἐφαπτομένων καὶ τῇ μιᾷ τῶν διαμέτρων ἴσον ἔσται τῷ γινομένῳ τριγώνῳ πρός τε τῇ αὐτῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ ἑτέρᾳ τῶν διαμέτρων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ $AE\Gamma$, $BE\Delta$, καὶ τῆς AB τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ AZ, BH συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ Θ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς τομῆς τὸ K, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ταῖς ἐφαπτομέναις παράλληλοι ἤχθωσαν αἱ $KM\Lambda$, $KN\Xi$. λέγω, ὅτι τὸ KZ τετράπλευρον τῷ ΛIN τριγώνῳ ἐστὶν ἴσον.

ἐπεὶ οὖν ἀντικείμεναι αἱ AB, $\Gamma\Delta$, καὶ τῆς AB ἐφάπτεται ἡ AZ συμπίπτουσα τῇ $B\Delta$, καὶ παρὰ τὴν AZ ἦκται ἡ $K\Lambda$, ἴσον ἐστὶ τὸ ΛIN τρίγωνον τῷ KZ τετραπλεύρῳ.

ζ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖά τινα ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις συμπίπτουσαι ταῖς τε ἐφαπτομέναις καὶ ταῖς διαμέτροις, τὰ γινόμενα ὑπὸ τῶν ἀχθεισῶν τετράπλευρα, βεβηκότα δὲ ἐπὶ τῶν διαμέτρων, ἴσα ἔσται ἀλλήλοις.

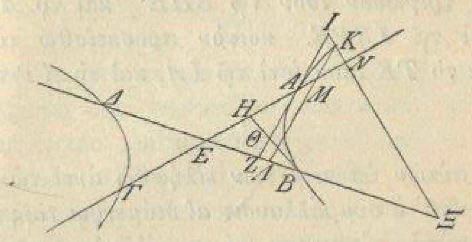
ὑποκείσθω γὰρ τὰ προειρημένα, καὶ εἰλήφθω ἐφ' ἑκατέρας τῶν τομῶν σημεῖα τὰ K, Λ, καὶ δι' αὐτῶν

2. ὑποκειμένων] repet. mg. m. rec. V. 8. τῇ] (alt.) om. V; corr. p. 13. $KM\Lambda$] $K\Lambda M$ V; corr. p. 22. συμπίπτουσαι] pcv; euan. V, rep. mg. m. rec.

VI.

Iisdem suppositis si in altera oppositarum punctum aliquod sumitur, et ab eo rectae contingentibus parallelae ducuntur et cum contingentibus et cum diametris concurrentes, quadrangulus ab iis ad alteram contingentium alteramque diametrum effectus aequalis erit triangulo ad eandem contingentem alteramque diametrum orto.

sint oppositae, quarum diametri sint $AE\Gamma$, $BE\Delta$, et sectionem AB contingant AZ, BH inter se in Θ



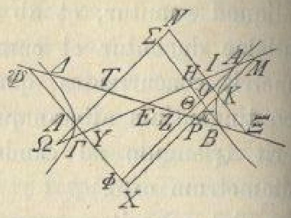
concurrentes, sumatur autem in sectione punctum aliquod K, ab eoque contingentibus parallelae ducantur $KM\Lambda$, $KN\Xi$. dico, esse $KZ = \Lambda IN$.

iam quoniam AB, $\Gamma\Delta$ sectiones oppositae sunt, et sectionem AB contingit AZ cum $B\Delta$ concurrens, rectae autem AZ parallela ducta est $K\Lambda$, erit [prop. II] $\Lambda IN = KZ$.

VII.

Iisdem suppositis si in utraque sectione puncta aliqua sumuntur, et ab iis contingentibus parallelae ducuntur rectae et cum contingentibus et cum diametris concurrentes, quadranguli rectis ita ductis effecti et in diametris collocati inter se aequales erunt.

παρὰ μὲν τὴν AZ ἤχθωσαν ἡ $MK\Pi P X$ καὶ ἡ $N\Sigma T\Lambda\Omega$, παρὰ δὲ τὴν BH ἡ $NIOK\Xi$ καὶ ἡ $X\Phi Y\Lambda\Psi$. λέγω, ὅτι ἔσται τὰ τῆς προτάσεως.



ἐπεὶ γὰρ τὸ AOI τρίγωνον τῷ PO τετραπλεύρῳ ἐστὶν ἴσον, κοινὸν προσκείσθω τὸ EO· ὅλον ἄρα τὸ AEZ τρίγωνον ἴσον ἐστὶ τῷ KE. ἔστι δὲ καὶ τὸ BEH τρίγωνον ἴσον τῷ ΛE τετραπλεύρῳ, καί ἐστι τὸ AEZ τρίγωνον ἴσον τῷ BHE· καὶ τὸ ΛE ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ $IKPE$. κοινὸν προσκείσθω τὸ NE· ὅλον ἄρα τὸ TK ἴσον ἐστὶ τῷ $I\Lambda$, καὶ τὸ KY τῷ $P\Lambda$.

η'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω ἀντὶ τῶν K, Λ τὰ Γ, Δ, καθ' ἃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν αἱ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις.

λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΔH τετράπλευρον τῷ $Z\Gamma$ καὶ τὸ ΞI τῷ OT.

ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ $AH\Theta$ τρίγωνον τῷ ΘBZ, καὶ η ἀπὸ τοῦ A ἐπὶ τὸ B παράλληλος τῇ ἀπὸ τοῦ H ἐπὶ τὸ Z, ἀνάλογον ἄρα ἐστίν, ὡς ἡ AE πρὸς EH, ἡ BE πρὸς EZ· καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ EA πρὸς AH, ἡ EB πρὸς BZ. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓA πρὸς AE, ἡ ΔB πρὸς BE· ἑκατέρα γὰρ ἑκατέρας διπλῆ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓA πρὸς AH, ἡ ΔB

4. γάρ] cp, et V, sed deinde del. 1 litt. m. 1. 12. τὸ NE] cp, corr. ex τὸν ε̄ V. 20. τό] τῷ V; corr. Halley. τῷ] τό cp. 21. τῷ] cp, corr. ex τό m. 1 V. 23. H] pcv, euan. V.

supponantur enim, quae antea diximus, et in utraque sectione puncta sumantur K, Λ, per eaque rectae AZ parallelae ducantur $MK\Pi PX$, $N\Sigma T\Lambda\Omega$, rectae autem BH parallelae $NIOK\Xi$, $X\Phi Y\Lambda\Psi$. dico, euenire, quae in propositione dicta sunt.

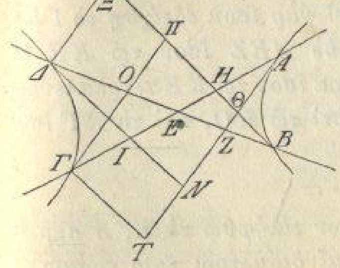
nam quoniam est $AOI = PO$ [prop. II], commune adiiciatur EO; itaque erit $AEZ = KE$. est autem etiam [u. Eutocius ad prop. VI] $BEH = \Lambda E$, et [prop. I] $AEZ = BHE$; itaque etiam $\Lambda E = IKPE$. commune adiiciatur NE; ergo $TK = I\Lambda$; et etiam $KY = P\Lambda$.

VIII.

Iisdem suppositis pro K, Λ sumantur Γ, Δ, in quibus diametri cum sectionibus concurrant, per eaque ducantur rectae contingentibus parallelae.

dico, esse $\Delta H = Z\Gamma$, $\Xi I = OT$.

quoniam enim demonstrauimus, esse $AH\Theta = \Theta BZ$ [prop. I], et recta ab A ad B ducta rectae ab H ad Z ductae parallela est [II, 39 et Pappi lemma I], erit [Eucl. VI, 4]



$AE : EH = BE : EZ$;

et conuertendo

$EA : AH = EB : BZ$

[Eucl. V, 19 coroll.]. est autem etiam

$\Gamma A : AE = \Delta B : BE$;

nam utraque utraque duplo maior est [I, 30]. ex aequo igitur [Eucl. V, 20] $\Gamma A : AH = \Delta B : BZ$. et trianguli similes sunt propter parallelas; itaque

$\Gamma TA : A\Theta H = \Xi B\Delta : \Theta BZ$ [Eucl. VI, 19].

πρὸς BZ. καί ἐστιν ὅμοια τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους· ὡς ἄρα τὸ $ΓΤΔ$ τρίγωνον πρὸς τὸ $AΘH$, τὸ $ΞBΔ$ πρὸς τὸ $ΘBZ$. καὶ ἐναλλάξ· ἴσον δὲ τὸ $AHΘ$ τῷ $ΘZB$· ἴσον ἄρα καὶ τὸ $TAΓ$ τῷ $ΔBΞ$. ὧν τὸ $AHΘ$ ἴσον ἐδείχθη τῷ $BΘZ$· λοιπὸν ἄρα τὸ $ΔΘ$ τετράπλευρον ἴσον τῷ $ΓΘ$. ὥστε καὶ τὸ $ΔH$ τῷ $ΓZ$.

καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $ΓO$ τῇ AZ, ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓOE$ τρίγωνον τῷ AEZ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ $ΔEI$ τῷ BEH. ἀλλὰ τὸ BEH τῷ AEZ ἴσον· καὶ τὸ $ΓOE$ ἄρα ἴσον τῷ $ΔEI$. ἔστι δὲ καὶ τὸ $HΔ$ τετράπλευρον ἴσον τῷ $ZΓ$. ὅλον ἄρα τὸ $ΞI$ ἴσον ἐστὶ τῷ OT.

θ΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν τὸ μὲν ἕτερον τῶν σημείων μεταξὺ ᾖ τῶν διαμέτρων, οἷον τὸ K, τὸ δὲ ἕτερον ἑνὶ τῶν $Γ, Δ$ ταὐτόν, οἷον τὸ $Γ$, καὶ ἀχθῶσιν αἱ παράλληλοι, λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΓEO$ τρίγωνον τῷ KE τετραπλεύρῳ καὶ τὸ $ΔO$ τῷ $ΔM$.

τοῦτο δὲ φανερόν. ἐπεὶ γὰρ ἴσον ἐδείχθη τὸ $ΓEO$ τρίγωνον τῷ AEZ, τὸ δὲ AEZ ἴσον τῷ KE τετραπλεύρῳ, καὶ τὸ $ΓEO$ ἄρα ἴσον τῷ KE τετραπλεύρῳ. ὥστε καὶ τὸ $ΓPM$ ἴσον ἐστὶ τῷ KO, καὶ τὸ $KΓ$ ἴσον τῷ $ΔO$.

ι΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων εἰλήφθω τὰ $K, Δ$ σημεῖα μὴ καθ' ὃ συμβάλλουσιν αἱ διάμετροι ταῖς τομαῖς.

δεικτέον δή, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΔTPX$ τετράπλευρον τῷ $ΩXKI$ τετραπλεύρῳ.

4. $ΔBΞ$] $ΔEΞ$ V; corr. p ($ΞΔB$).

et permutando [Eucl. V, 16]; est autem [prop. I] $AHΘ = ΘZB$; quare etiam $TAΓ = ΔBΞ$. quorum est $AHΘ = BΘZ$, ut demonstrauimus; itaque reliquum $ΔΘ = ΓΘ$. quare etiam $ΔH = ΓZ$.

et quoniam $ΓO, AZ$ parallelae sunt, erit [Eucl. VI, 19] $ΓOE = AEZ$.[1] eodem autem modo etiam

$$ΔEI = BEH.$$

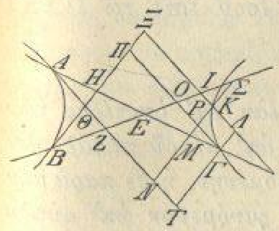
est autem $BEH = AEZ$ [prop. I]; quare etiam

$$ΓOE = ΔEI.$$

est autem etiam $HΔ = ZΓ$; ergo $ΞI = OT$.

IX.

Iisdem suppositis si alterum punctum inter diametros est ut K, alterum autem idem atque alterutrum punctorum $Γ$, $Δ$ ut $Γ$, et ducuntur parallelae, dico, esse $ΓEO = KE$, $ΔO = ΔM$.



et hoc manifestum est. quoniam enim demonstrauimus [Eucl. VI, 19; cfr. prop. VIII], esse $ΓEO = AEZ$, et est $AEZ = KE$ [Eutocius ad prop. VI], erit etiam $ΓEO = KE$. ergo etiam $ΓPM = KO$ et $KΓ$[2]$) = ΔO$.

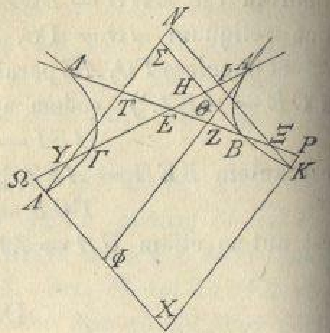
X.

Iisdem suppositis puncta K, $Δ$ ne sumantur, ubi diametri cum sectionibus concurrunt.

demonstrandum igitur, esse $ΔTPX = ΩXKI$.

1) Nam $ΓE = EA$ (I, 30).
2) H. e. $KMΓΔ$.

ἐπεὶ γὰρ ἐφάπτονται αἱ ΑΖ, ΒΗ, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροί εἰσιν αἱ ΑΕ, ΒΕ, καὶ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας εἰσὶν αἱ ΛΤ, ΚΙ, μεῖζόν ἐστι τὸ ΤΥΕ τρίγωνον τοῦ ΥΩΛ τῷ ΕΖΑ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ μεῖζόν ἐστι τῷ ΒΕΗ. ἴσον δὲ τὸ ΑΕΖ τῷ ΒΕΗ· τῷ αὐτῷ ἄρα ὑπερέχει τό τε ΤΕΥ τοῦ ΥΩΛ καὶ τὸ ΞΕΙ τοῦ ΞΡΚ. τὸ ΤΥΕ ἄρα μετὰ τοῦ ΞΡΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ΞΕΙ μετὰ τοῦ ΥΩΛ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΚΞΕΥΛΧ· τὸ ΛΤΡΧ ἄρα τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΩΧΚΙ τετραπλεύρῳ.



ια'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσιν ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν τρίγωνον πρὸς τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἠγμένῃ διαμέτρῳ διαφέρει τοῦ ἀπολαμβανομένου τριγώνου πρός τε τῇ ἐφαπτομένῃ καὶ τῇ διὰ τῆς ἁφῆς ἠγμένῃ διαμέτρῳ τῷ ἀπολαμβανομένῳ τριγώνῳ πρὸς τῇ συμπτώσει τῶν ἐφαπτομένων.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΕ, ΔΕ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ε, καὶ ἔστω

5. ΥΩΛ] pcv, Ω e corr. m. 1 V. 9. τῷ] (alt.) pc, corr. ex τό m. 1 V. αὐτῷ] pc, corr. ex αὐτό m. 1 V. 14. ΚΞΕΤΧ Vp; corr. Memus.

nam quoniam AZ, BH contingunt, et AE, BE diametri sunt per puncta contactus ductae, contingentibusque parallelae sunt ΛT, KI, erit

$$T\Upsilon E = \Upsilon\Omega\Lambda + EZA,$$

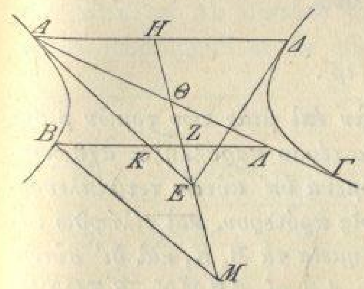
et eodem modo etiam $\Xi EI = \Xi PK + BEH$ [I, 44]. est autem $AEZ = BEH$ [prop. I]. itaque erit

$$TE\Upsilon \div \Upsilon\Omega\Lambda = \Xi EI \div \Xi PK.$$

quare erit $T\Upsilon E + \Xi PK = \Xi EI + \Upsilon\Omega\Lambda$. commune adiiciatur $K\Xi E\Upsilon\Lambda X$; ergo erit $\Lambda TPX = \Omega XKI$.

XI.

Iisdem suppositis si in utralibet sectione punctum aliquod sumitur, et ab eo rectae ducuntur parallelae altera contingenti, altera rectae puncta contactus coniungenti, triangulus ab iis ad diametrum per punctum concursus contingentium ductam effectus a triangulo absciso ad contingentem diametrumque per punctum contactus ductam differt triangulo ad punctum concursus contingentium absciso.



sint oppositae AB, $\Gamma\Delta$, et contingentes AE, ΔE in E concurrant, centrum autem sit Θ, ducanturque $A\Delta$, $E\Theta H$, et in sectione AB punctum aliquod sumatur B, et per id ducatur $BZ\Lambda$ rectae AH parallela, BM autem rectae AE parallela. dico, esse $BZM = AK\Lambda + KEZ$.

In V duae praeterea ad prop. XI figurae sunt.

κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν ἥ τε ΑΔ καὶ ἡ ΕΘΗ, εἰλήφθω δὲ ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Β, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἡ ΒΖΛ, παρὰ δὲ τὴν ΑΕ ἡ ΒΜ. λέγω, ὅτι τὸ ΒΖΜ τρίγωνον τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΕΖ.

ὅτι μὲν γὰρ ἡ ΑΔ δίχα τέμνεται ὑπὸ τῆς ΕΘ, φανερόν, καὶ ὅτι ἡ ΕΘ διάμετρός ἐστι συζυγὴς τῇ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΑΔ ἀγομένῃ· ὥστε κατηγμένη ἐστὶν ἡ ΑΗ ἐπὶ τὴν ΕΗ.

ἐπεὶ οὖν διάμετρός ἐστιν ἡ ΗΕ, καὶ ἐφάπτεται μὲν ἡ ΑΕ, κατηγμένη δὲ ἡ ΑΗ, ληφθέντος δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς τοῦ Β σημείου κατήχθησαν ἐπὶ τὴν ΕΗ ἡ μὲν ΒΖ παρὰ τὴν ΑΗ, ἡ δὲ ΒΜ παρὰ τὴν ΑΕ, δῆλον, ὅτι τὸ ΒΜΖ τρίγωνον τοῦ ΛΘΖ διαφέρει τῷ ΘΑΕ. ὥστε καὶ τὸ ΒΖΜ τοῦ ΑΚΛ διαφέρει τῷ ΚΖΕ.

καὶ συναποδέδεικται, ὅτι τὸ ΒΚΕΜ τετράπλευρον ἴσον ἐστὶ τῷ ΛΚΑ τριγώνῳ.

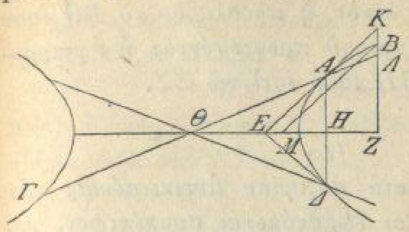
ιβ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἐπὶ μιᾶς τῶν τομῶν $\bar{\beta}$ σημεῖα ληφθῇ, καὶ ἀφ' ἑκατέρου παράλληλοι ἀχθῶσιν, ὁμοίως ἴσα ἔσται τὰ γινόμενα ὑπ' αὐτῶν τετράπλευρα.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ Β, Κ, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παράλληλοι τῇ ΑΔ αἱ ΛΒΜΝ, ΚΞΟΥΠ, τῇ δὲ ΑΕ αἱ ΒΞΡ, ΛΚΣ. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ ΒΠ τῷ ΚΡ.

25. ΛΒΜΝ] ΒΛΜΝ V; corr. p. 26. ΛΚΣ] ΚΛΣ V; corr. p.

nam hoc quidem manifestum est, $A\varDelta$ ab $E\Theta$ in duas partes aequales secari [II, 39], et $E\Theta$ diametrum esse cum ea coniugatam, quae per Θ rectae $A\varDelta$ parallela ducitur [II, 38]; quare AH ad HE ordinate ducta est [I def. 6].

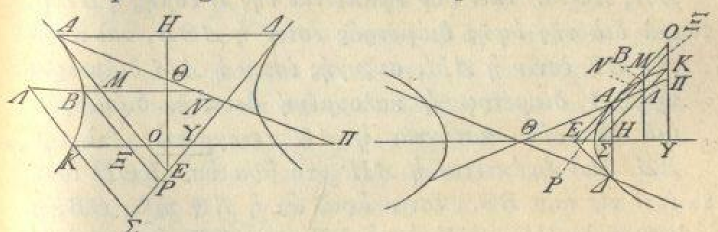


iam quoniam HE diametrus est, et contingit AE, ordinate autem ducta est AH, et sumpto in sectione puncto B ad EH ductae sunt BZ rectae AH parallela et BM rectae AE parallela, adparet, esse $BMZ = \varLambda\Theta Z + \Theta AE$ [I, 45][1]). ergo etiam $BZM = AK\varLambda + KZE$.

et simul demonstratum est, esse $BKEM = \varLambda KA$.

XII.

Iisdem positis si in altera sectione duo puncta sumuntur, et ab utroque parallelae ducuntur, eodem modo quadranguli ab iis effecti aequales erunt.



sint enim eadem, quae antea, et in AB sectione puncta quaelibet sumantur B, K, et per ea ducantur

1) In secunda figura ex I, 43 erit
$$BMZ = \varLambda\Theta Z \div \Theta AE = KZE \div AK\varLambda.$$
et hoc significat illud διαφέρει.

ἐπεὶ γὰρ δέδεικται ἴσον τὸ μὲν $ΛΟΠ$ τρίγωνον τῷ $ΚΟΕΣ$ τετραπλεύρῳ, τὸ δὲ $ΛΜΝ$ τῷ $ΒΜΕΡ$, λοιπὸν ἄρα τὸ $ΚΡ$ λιπὸν ἢ προσλαβὸν τὸ $ΒΟ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΜΠ$. καὶ κοινοῦ προστεθέντος ἢ ἀφαιρουμένου τοῦ $ΒΟ$ τὸ $ΒΠ$ ἴσον ἐστὶ τῷ $ΞΣ$.

ιγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις τῶν ἐφεξῆς τομῶν εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσιν, ἴσα ἔσται τὰ τρίγωνα, ὧν κορυφὴ κοινὴ τὸ κέντρον ἐστὶ τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν συζυγεῖς ἀντικείμεναι, ἐφ' ὧν τὰ $Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$ σημεῖα, καὶ τῶν $Α$, $Β$ τομῶν ἐφαπτέσθωσαν αἱ $ΒΕ$, $ΑΕ$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ $Ε$, καὶ ἔστω κέντρον τὸ $Θ$, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $ΑΘ$, $ΒΘ$ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ $Δ$, $Γ$. λέγω, ὅτι ἴσον ἐστὶ τὸ $ΒΖΘ$ τρίγωνον τῷ $ΑΗΘ$ τριγώνῳ.

ἤχθωσαν γαρ διὰ τῶν $Α$, $Θ$ παρὰ τὴν $ΒΕ$ αἱ $ΑΚ$, $ΛΘΜ$. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται τῆς $Β$ τομῆς ἡ $ΒΖΕ$, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς διάμετρός ἐστιν ἡ $ΔΘΒ$, καὶ παρὰ τὴν $ΒΕ$ ἐστιν ἡ $ΛΜ$, συζυγής ἐστιν ἡ $ΛΜ$ διάμετρος τῇ $ΒΔ$ διαμέτρῳ ἡ καλουμένη δευτέρα διάμετρος· διὰ δὲ τοῦτο κατῆκται ἡ $ΑΚ$ τεταγμένως ἐπὶ την $ΒΔ$. καὶ ἐφάπτεται ἡ $ΑΗ$· τὸ ἄρα ὑπὸ $ΚΘΗ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΒΘ$. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $ΚΘ$ πρὸς $ΘΒ$, ἡ $ΒΘ$ πρὸς $ΗΘ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΚΘ$ πρὸς $ΘΒ$, ἡ $ΚΑ$ πρὸς

3. λειπόν V; corr. p. 4. προστιθεν̅ V, προστιθέντος cv, corr. p; fort. προστιθεμένου. Deinde del. ἢ m. 1 V. 13. σημεῖα] delendum? 19. $ΛΘΜ$] $ΘΛΜ$ V; corr. p. 24. $ΚΘΗ$] $ΚΗΘ$ V; corr. Memus. 25. ἀπό] om. V; corr. p.

$ABMN$, $K\Xi O\Upsilon\Pi$ rectae $A\Delta$ parallelae, rectae autem AE parallelae $B\Xi P$, $\Delta K\Sigma$. dico, esse $B\Pi = KP$.

nam quoniam demonstratum est [prop. XI coroll.], esse $AO\Pi = KOE\Sigma$ et $\Lambda MN = BMEP$, erit

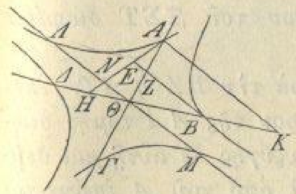
$$KP \div BO = M\Pi$$

uel[1]) $KP + BO = M\Pi$. et communi adiecto uel ablato BO, erit $B\Pi = \Xi\Sigma$.

XIII.

Si in oppositis coniugatis rectae sectiones deinceps positas contingentes inter se concurrunt, et per puncta contactus diametri ducuntur, aequales erunt trianguli, quorum uertex communis centrum est oppositarum.

sint oppositae coniugatae, in quibus sint puncta A, B, Γ, Δ, et sectiones A, B contingant BE, AE in E concurrentes, centrum autem sit Θ, et ductae $A\Theta$, $B\Theta$ ad Δ, Γ producantur. dico, esse $BZ\Theta = AH\Theta$.



ducantur enim per A, Θ rectae BE parallelae AK, $\Lambda\Theta M$. iam quoniam sectionem B contingit BZE, et per punctum contactus diametrus ducta est $\Delta\Theta B$, et rectae BE parallela est ΛM, ΛM diametrus est cum diametro $B\Delta$ coniugata, secunda diametrus quae uocatur [II, 20]; qua de causa AK ad $B\Delta$ ordinate ducta est [I def. 6]. et AH contingit; itaque erit [I, 38] $K\Theta \times \Theta H = B\Theta^2$. quare [Eucl. VI, 17]

$$K\Theta : \Theta B = B\Theta : H\Theta.$$

uerum $K\Theta : \Theta B = KA : BZ = A\Theta : \Theta Z$ [Eucl. VI, 4];

1) In secunda figura.

ΒΖ καὶ ἡ ΑΘ πρὸς ΘΖ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΑΘ πρὸς ΖΘ, ἡ ΒΘ πρὸς ΗΘ. καί εἰσιν αἱ ὑπὸ ΒΘΖ, ΗΘΖ δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι· ἴσον ἄρα τὸ ΑΗΘ τρίγωνον τῷ ΒΘΖ τριγώνῳ.

ιδ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐφ' ὁποτέρας τῶν τομῶν σημεῖόν τι ληφθῇ, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον πρὸς τῷ κέντρῳ τρίγωνον τοῦ γινομένου περὶ τὴν αὐτὴν γωνίαν τριγώνου διοίσει τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον.

ἔστω τὰ μὲν ἄλλα τὰ αὐτά, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς Β τομῆς τὸ Ξ, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ μὲν τὴν ΑΗ ἤχθωσαν ἡ ΞΡΣ, παρὰ δὲ τὴν ΒΕ ἡ ΞΤΟ. λέγω, ὅτι τὸ ΟΘΤ τρίγωνον τοῦ ΞΣΤ διαφέρει τῷ ΘΒΖ.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ Α παρὰ τὶν ΒΖ ἡ ΑΥ. ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον τῆς ΑΛ τομῆς διάμετρος μέν ἐστιν ἡ ΛΘΜ, συζυγὴς δὲ αὐτῇ καὶ δευτέρα διάμετρος ἡ ΔΘΒ, καὶ ἀπὸ τοῦ Α ἐφάπτεται ἡ ΑΗ, κατῆκται δὲ παρὰ τὴν ΛΜ ἡ ΑΥ, ἕξει ἡ ΑΥ πρὸς τὴν ΥΗ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ καὶ ἐκ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ ΛΜ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΑΥ πρὸς ΥΗ, ἡ ΞΤ πρὸς ΤΣ, ὡς δὲ ἡ ΘΥ πρὸς ΥΑ, ἡ ΘΤ πρὸς ΤΟ καὶ ἡ ΘΒ πρὸς ΒΖ,

4. ΒΘΖ] ΑΘΖ V; corr. Memus. 15. ἤχθω? ΞΤΟ] ΞΟΤ V; corr. p. 18. ΒΖ] cvp; in V obscurum est Β. 22. ΛΜ] p, Λ e corr. m. 1 V; corr. ex ΑΜ c; ΑΜ v. 24. ἐκ τοῦ] ἐξ οὗ V; corr. ego; τοῦ p. 27. ΤΟ] cvp, Ο obscuratum in V.

itaque etiam $A\Theta : Z\Theta = B\Theta : H\Theta$. et

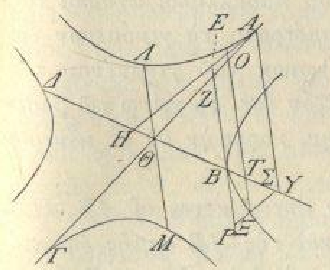
$$\angle B\Theta Z + H\Theta Z$$

duobus rectis aequales sunt; ergo $AH\Theta = B\Theta Z$ [u. Eutocius].

XIV.

Iisdem suppositis si in utralibet sectionum punctum aliquod sumitur, et ab eo contingentibus parallelae rectae usque ad diametros ducuntur, triangulus ad centrum ortus a triangulo in eodem angulo orto differet triangulo basim habenti contingentem, uerticem autem centrum.

sint cetera eadem, sumatur autem in B sectione punctum aliquod Ξ, et per id rectae AH parallela ducatur $\Xi P\Sigma$, rectae autem BE parallela ΞTO. dico, esse $O\Theta T = \Xi\Sigma T + \Theta BZ$.



ducatur enim ab A rectae BZ parallela $A\Upsilon$. iam quoniam eadem de causa, qua antea, $\Lambda\Theta M$ diametrus est sectionis $A\Lambda$, $\Delta\Theta B$ autem cum ea coniugata et secunda diametrus [II, 20], et ab A contingit AH, rectae autem ΛM parallela ducta est $A\Upsilon$, habebit $A\Upsilon : \Upsilon H$ rationem compositam ex ratione $\Theta\Upsilon : \Upsilon A$ et ea, quam habet latus transuersum figurae ad ΛM adplicatae ad rectum [I, 40]. est autem

$$A\Upsilon : \Upsilon H = \Xi T : T\Sigma$$

et $\Theta\Upsilon : \Upsilon A = \Theta T : TO = \Theta B : BZ$ [Eucl. VI, 4], et ut latus transuersum figurae ad ΛM adplicatae ad ὡς δὲ ἡ τοῦ πρὸς τῇ $\mathit{\Lambda M}$ εἴδους πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν, ἡ τοῦ πρὸς τῇ $B\varDelta$ ὀρθία πρὸς τὴν πλαγίαν. ἕξει ἄρα ἡ ΞT πρὸς $T\Sigma$ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘB πρὸς BZ, τουτέστιν ἡ ΘT πρὸς TO, καὶ τοῦ ὃν ἔχει ἡ τοῦ πρὸς τῇ $B\varDelta$ εἴδους ὀρθία πλευρὰ πρὸς τὴν πλαγίαν. καὶ διὰ τὰ δεδειγμένα ἐν τῷ μα' τοῦ α' βιβλίου τὸ $T\Theta O$ τρίγωνον τοῦ $\Xi T\Sigma$ διαφέρει τῷ $BZ\Theta$.

ὥστε καὶ τῷ $\mathit{\Lambda H\Theta}$.

ιε'.

Ἐὰν μιᾶς τῶν κατὰ συζυγίαν ἀντικειμένων εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι ἀχθῶσι, ληφθῇ δέ τι σημεῖον ἐφ' ὁποτέρας τῶν συζυγῶν τομῶν, καὶ ἀπ' αὐτοῦ παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις ἕως τῶν διαμέτρων, τὸ γινόμενον ὑπ' αὐτῶν πρὸς τῇ τομῇ τρίγωνον τοῦ γινομένου τριγώνου πρὸς τῷ κέντρῳ μεῖζόν ἐστι τριγώνῳ τῷ βάσιν μὲν ἔχοντι τὴν ἐφαπτομένην, κορυφὴν δὲ τὸ κέντρον τῶν ἀντικειμένων.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ AB, $H\Sigma$, T, Ξ, ὧν κέντρον τὸ Θ, καὶ τῆς AB τομῆς ἐφαπτέσθωσαν αἱ $A\varDelta E$, $B\varDelta\Gamma$, καὶ διὰ τῶν A, B ἁφῶν ἤχθωσαν διάμετροι αἱ $A\Theta Z\Phi$, $B\Theta T$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $H\Sigma$ τομῆς σημεῖόν τι τὸ Σ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ μὲν τὴν $B\Gamma$ ἡ $\Sigma Z\Lambda$, παρὰ δὲ τὴν ΛE ἡ $\Sigma\Upsilon$. λέγω, ὅτι τὸ $\Sigma\Lambda\Upsilon$ τρίγωνον τοῦ $\Theta\Lambda Z$ τριγώνου μεῖζόν ἐστι τῷ $\Theta\Gamma B$.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν $B\Gamma$ ἡ $\Xi\Theta H$, παρὰ

5. TO] $T\Theta$ V; corr. Memus. 23. $B\Theta T$] T V; corr. p. 28. τήν] vp, τῇ V; τό c.

rectum, ita latus rectum figurae ad $B\varDelta$ adplicatae ad transuersum [I, 56]. itaque ratio $\Xi T : T\Sigma$ rationem habebit compositam ex ratione $\Theta B : BZ$ siue $\Theta T : TO$ et ea, quam habet latus rectum figurae ad $B\varDelta$ adplicatae ad transuersum. et propter ea, quae in propositione XLI libri primi demonstrauimus, erit

$$T\Theta O = \Xi T\Sigma + BZ\Theta.$$

quare etiam $T\Theta O = \Xi T\Sigma + \Lambda H\Theta$ [prop. XIII].

XV.

Si rectae unam sectionum oppositarum coniugatarum contingentes concurrunt, et per puncta contactus diametri ducuntur, in quauis autem sectionum coniugatarum punctum aliquod sumitur, et ab eo contingentibus parallelae rectae usque ad diametros ducuntur, triangulus ab iis ad sectionem effectus triangulo ad centrum orto maior est triangulo basim habenti contingentem, uerticem autem centrum oppositarum.

sint oppositae coniugatae AB, $H\Sigma$, T, Ξ, quarum centrum sit Θ, et sectionem AB contingant $A\varDelta E$, $B\varDelta\Gamma$, per A, B autem puncta contactus ducantur diametri $A\Theta Z\Phi$, $B\Theta T$, et in sectione $H\Sigma$ sumatur punctum aliquod Σ, et per id rectae $B\Gamma$ parallela ducatur $\Sigma Z\Lambda$, rectae autem AE parallela $\Sigma\Upsilon$. dico, esse $\Sigma\Lambda\Upsilon = \Theta\Lambda Z + \Theta\Gamma B$.

ducatur enim per Θ rectae $B\Gamma$ parallela $\Xi\Theta H$, per H autem rectae AE parallela KIH, et rectae BT parallela ΣO; manifestum igitur, esse ΞH, BT diametros coniugatas [II, 20], et rectam ΣO rectae BT parallelam ad ΘHO ordinate ductam esse [I def. 6], et $\Sigma\Lambda\Theta O$ parallelogrammum esse.

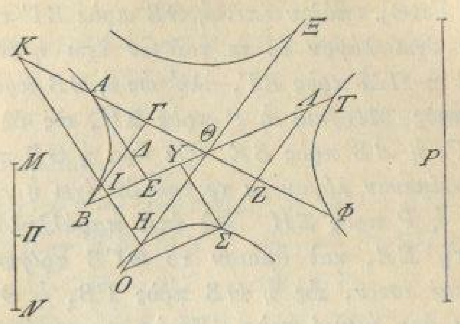
δὲ τὴν $\varDelta E$ διὰ τοῦ H ἡ KIH, παρὰ δὲ τὴν BT ἡ ΣO· φανερὸν δή, ὅτι συζυγής ἐστι διάμετρος ἡ ΞH τῇ BT, καὶ ὅτι ἡ ΣO παράλληλος οὖσα τῇ BT κατῆκται τεταγμένως ἐπὶ τὴν ΘHO, καὶ ὅτι παραλληλόγραμμόν ἐστι τὸ $\Sigma\varDelta\Theta O$.

ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ $B\Gamma$, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἐστιν ἡ $B\Theta$, καὶ ἑτέρα ἐφαπτομένη ἐστὶν ἡ $\varDelta E$, γεγονέτω ὡς ἡ $\varDelta B$ πρὸς BE, ἡ MN πρὸς τὴν διπλασίαν τῆς $B\Gamma$· ἡ ἄρα MN ἐστιν ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν BT εἴδους. δίχα τετμήσθω ἡ MN κατὰ τὸ Π· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $\varDelta B$ πρὸς BE, ἡ $M\Pi$ πρὸς $B\Gamma$. πεποιήσθω δή, ὡς ἡ ΞH πρὸς TB, ἡ TB πρὸς P· ἔσται δὴ καὶ ἡ P ἡ καλουμένη ὀρθία τοῦ παρὰ τὴν ΞH εἴδους. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ $\varDelta B$ πρὸς BE, ἡ $M\Pi$ πρὸς ΓB, ἀλλ' ὡς μὲν ἡ $\varDelta B$ πρὸς BE, τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\varDelta BE$, ὡς δὲ ἡ $M\Pi$ πρὸς ΓB, τὸ ὑπὸ $M\Pi$, $B\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Gamma B\Theta$, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\varDelta BE$, τὸ ὑπὸ ΠM, $B\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Gamma B\Theta$. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ $M\Pi$, $B\Theta$ τῷ ἀπὸ ΘH, διότι τὸ μὲν ἀπὸ ΞH ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ TB, MN, καὶ τὸ μὲν ὑπὸ $M\Pi$, $B\Theta$ τέταρτον τοῦ ὑπὸ TB, MN, τὸ δὲ ἀπὸ $H\Theta$ τέταρτον τοῦ ἀπὸ $H\Xi$· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\varDelta BE$, τὶ ἀπὸ $H\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Gamma B\Theta$. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ἀπὸ $H\Theta$, τὸ ὑπὸ $\varDelta BE$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Gamma B\Theta$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΘH, τὸ $\varDelta BE$ τρίγωνον πρὸς τὸ $H\Theta I$· ὅμοια γάρ· ὡς δὲ τὸ ὑπὸ $\varDelta BE$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Gamma B\Theta$, τὸ $\varDelta BE$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Gamma B\Theta$· ὡς ἄρα τὸ $\varDelta BE$ τρίγωνον πρὸς τὸ $H\Theta I$, τὸ $\varDelta BE$ πρὸς

---

12. πεποιείσθω V; corr. cp.

iam quoniam $B\Gamma$ contingit, et $B\Theta$ per punctum contactus ducta est, et alia contingens est $\varDelta E$, fiat



$\varDelta B : BE = MN : 2B\Gamma$; MN igitur latus est, rectum quod uocatur, figurae ad BT adplicatae [I, 50]. secetur MN in Π in duas partes aequales; itaque

$$\varDelta B : BE = M\Pi : B\Gamma.$$

fiat igitur $\Xi H : TB = TB : P$; itaque etiam P latus erit, rectum quod uocatur, figurae ad ΞH adplicatae [I, 56]. iam quoniam $\varDelta B : BE = M\Pi : \Gamma B$, uerum $\varDelta B : BE = \varDelta B^2 : \varDelta B \times BE$ et

$$M\Pi : \Gamma B = M\Pi \times B\Theta : \Gamma B \times B\Theta,$$

erit $\varDelta B^2 : \varDelta B \times BE = \Pi M \times B\Theta : \Gamma B \times B\Theta$. est autem $M\Pi \times B\Theta = \Theta H^2$, quia $\Xi H^2 = TB \times MN$ [I, 56], et [I, 30] $M\Pi \times B\Theta = \frac{1}{4} TB \times MN$,

$$H\Theta^2 = \tfrac{1}{4} H\Xi^2;$$

itaque erit $\varDelta B^2 : \varDelta B \times BE = H\Theta^2 : \Gamma B \times B\Theta$. permutando [Eucl. V, 16]

$$\varDelta B^2 : H\Theta^2 = \varDelta B \times BE : \Gamma B \times B\Theta.$$

In V praeter hanc figuram rectangula quaedam triangulique inueniuntur.

τὸ $\Gamma B\Theta$. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ $H\Theta I$ τῷ $\Gamma B\Theta$ [τὸ ἄρα $H\Theta K$ τρίγωνον τοῦ ΘIK διαφέρει τῷ $I\Theta H$, τουτέστι τῷ $\Gamma B\Theta$]. πάλιν ἐπεὶ ἡ ΘB πρὸς $B\Gamma$ τὸν συνημμένον ἔχει λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΘB πρὸς $M\Pi$ καὶ ἡ ΠM πρὸς $B\Gamma$, ἀλλ' ὡς ἡ ΘB πρὸς $M\Pi$, ἡ TB πρὸς MN καὶ ἡ P πρὸς ΞH, ὡς δὲ ἡ $M\Pi$ πρὸς $B\Gamma$, ἡ ΔB πρὸς BE, ἕξει ἄρα ἡ ΘB πρὸς $B\Gamma$ τὸν συγκείμενον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ ΔB πρὸς BE καὶ ἡ P πρὸς ΞH. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ $B\Gamma$ τῇ $\Sigma\Lambda$, καὶ ὅμοιον τὸ $\Theta\Gamma B$ τρίγωνον τῷ $\Theta\Lambda Z$, καί ἐστιν, ὡς ἡ ΘB πρὸς ΓB, ἡ $\Theta\Lambda$ πρὸς ΛZ, ἕξει ἄρα ἡ $\Theta\Lambda$ πρὸς ΛZ τὸν συνημμένον λόγον ἔκ τε τοῦ ὃν ἔχει ἡ P πρὸς ΞH καὶ ἡ ΔB πρὸς BE, τουτέστιν ἡ ΘH πρὸς ΘI. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ $H\Sigma$ διάμετρον ἔχουσα τὴν ΞH, ὀρθίαν δὲ τὴν P, καὶ ἀπό τινος σημείου τοῦ Σ κατῆκται ἡ ΣO, καὶ ἀναγέγραπται ἀπὸ μὲν τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῆς ΘH εἶδος τὸ ΘIH, ἀπὸ δὲ τῆς κατηγμένης τῆς ΣO ἤτοι τῆς $\Theta\Lambda$ ἴσης αὐτῇ τὸ $\Theta\Lambda Z$, ἀπὸ δὲ τῆς ΘO μεταξὺ τοῦ κέντρου καὶ τῆς κατηγμένης ἤτοι τῆς $\Sigma\Lambda$ ἴσης αὐτῇ τὸ $\Sigma\Lambda\Upsilon$ εἶδος ὅμοιον τῷ ἀπὸ τῆς ἐκ τοῦ κέντρου τῷ ΘIH, καὶ ἔχει τοὺς συγκειμένους λόγους, ὡς εἴρηται, τὸ $\Sigma\Lambda\Upsilon$ τρίγωνον τοῦ $\Theta\Lambda Z$ μεῖζόν ἐστι τῷ $\Theta\Gamma B$.

ιϛʹ.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν, ἀπὸ δέ τινος σημείου

---

1. τὸ ἄρα — 3. $\Gamma B\Theta$] deleo; nam inutilia sunt. 2. τῷ $I\Theta H$] ὧι θῆ V; corr. pc. 6. ἡ P] $\overline{\eta\varrho}$ V; corr. p. ΞH] ΞN V; corr. Memus. 7. BE] cp, BE uel KE V, KE v. 9. ΞH] ΞN V; corr. Memus. 10. $B\Gamma$] B V; corr. p. καί] bis V; corr. cpv. 19. ἴση V; corr. Memus.

est autem [Eucl. VI, 19] $\Delta B^2 : \Theta H^2 = \Delta BE : H\Theta I$; trianguli enim hi similes sunt [Eucl. I, 29]; et $\Delta B \times BE : \Gamma B \times B\Theta = \Delta BE : \Gamma B\Theta$ [Eucl. VI, 23]. itaque $\Delta BE : H\Theta I = \Delta BE : \Gamma B\Theta$. quare $H\Theta I = \Gamma B\Theta$ [Eucl. V, 9]. itaque erit

$$H\Theta K = \Theta IK + I\Theta H = \Theta IK + \Gamma B\Theta.$$

rursus quoniam est

$$\Theta B : B\Gamma = (\Theta B : M\Pi) \times (M\Pi : B\Gamma)$$

et $\Theta B : M\Pi = TB : MN$ [I, 30] $= P : \Xi H$ et

$$M\Pi : B\Gamma = \Delta B : BE,$$

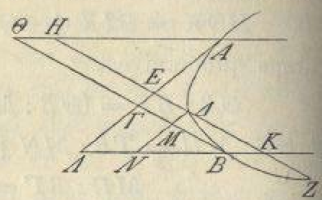
erit $\Theta B : B\Gamma = (\Delta B : BE) \times (P : \Xi H)$. et quoniam $B\Gamma$, $\Sigma\Lambda$ parallelae sunt, et trianguli $\Theta\Gamma B$, $\Theta\Lambda Z$ similes [Eucl. I, 29], et $\Theta B : \Gamma B = \Theta\Lambda : \Lambda Z$ [Eucl. VI, 4], erit

$$\Theta\Lambda : \Lambda Z = (P : \Xi H) \times (\Delta B : BE)$$
$$= \text{[Eucl. VI, 4]}\ (P : \Xi H) \times (\Theta H : \Theta I).$$

iam quoniam hyperbola est $H\Sigma$ diametrum habens ΞH, latus rectum autem P, et a puncto aliquo Σ ordinate ducta est ΣO, et in radio ΘH figura descripta est ΘIH, in ordinata autem ΣO siue $\Theta\Lambda$ [Eucl. I, 34] ei aequali $\Theta\Lambda Z$, et in ΘO inter centrum ordinatamque posita siue in $\Sigma\Lambda$ ei aequali $\Sigma\Lambda\Upsilon$ figura figurae ΘIH in radio descriptae similis, et rationes compositas habet, ut diximus, erit [I, 41] $\Sigma\Lambda\Upsilon = \Theta\Lambda Z + \Theta\Gamma B$.

XVI.

Si duae rectae coni sectionem uel circuli ambitum contingentes concurrunt, et a puncto aliquo in sectione τῶν ἐπὶ τῆς τομῆς ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν τῶν ἐφαπτομένων, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον χωρίον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.



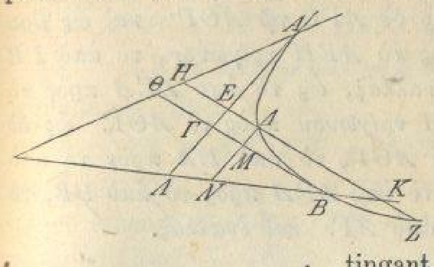
ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ ΑΒ, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αὐτῆς αἱ ΑΓ, ΓΒ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ Γ, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΑΒ τομῆς τὸ Δ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΓΒ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ.

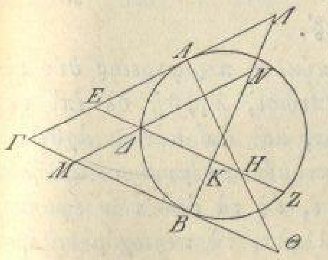
ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Α, Β διάμετροι ἥ τε ΑΗΘ καὶ ἡ ΚΒΛ, διὰ δὲ τοῦ Δ τῇ ΑΛ παράλληλος ἡ ΔΜΝ· φανερὸν αὐτόθεν, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΖ καὶ τὸ ΑΕΗ τρίγωνον τῷ ΛΔ τετραπλεύρῳ καὶ τὸ ΒΛΓ τρίγωνον τῷ ΑΓΘ.

ἐπεὶ οὖν ἡ ΖΚ τῇ ΚΔ ἐστιν ἴση, καὶ πρόσκειται ἡ ΔΕ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΚ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΛΚ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΔ, οὕτως τὸ ΕΚΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΝΚ. καὶ ἐναλλάξ· καὶ ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς ὅλον τὸ ΕΛΚ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΚ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΔΝΚ τρίγωνον· καὶ λοιπον ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΛ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΚ πρὸς

17. ΚΒΛ] ΒΚΛ Vp; corr. Comm.

posito recta alteri contingentium parallela ducitur sectionem alteramque contingentem secans, erit, ut quadrata contingentium inter se, ita spatium comprehensum rectis inter sectionem contingentemque positis ad quadratum rectae ad punctum contactus abscisae.





sit AB coni sectio uel ambitus circuli, et contingant $A\Gamma$, ΓB in Γ concurrentes, sumaturque in sectione AB punctum aliquod Δ, et per id ducatur $E\Delta Z$ rectae ΓB parallela. dico, esse

$$B\Gamma^2 : A\Gamma^2 = ZE \times E\Delta : EA^2.$$

ducantur enim per A, B diametri $AH\Theta$, $KB\Lambda$, per Δ autem rectae $A\Lambda$ parallela ΔMN; statim igitur adparet, esse $\Delta K = KZ$ [I, 46–47] et $AEH = \Lambda\Delta$ [prop. II] et $B\Lambda\Gamma = A\Gamma\Theta$ [prop. I].

iam quoniam est $ZK = K\Delta$, et adiecta est ΔE, erit [Eucl. II, 6] $ZE \times E\Delta + \Delta K^2 = KE^2$. et quoniam trianguli $E\Lambda K$, ΔNK similes sunt, erit [Eucl. VI, 19]

$$EK^2 : K\Delta^2 = EK\Lambda : \Delta NK.$$

et permutando [Eucl. V, 16]

$$EK^2 : E\Lambda K = \Delta K^2 : \Delta NK;$$

In V praeter nostras figuras et tria rectangula totidemque triangulos duae figurae adsunt alium casum in parabola et hyperbola repraesentantes.

τὸ EAK τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ EK πρὸς τὸ EAK, οὕτως τὸ ἀπὸ $ΓB$ πρὸς τὸ $AΓB$· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZEΔ$ πρὸς τὸ $ΔA$ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ $ΓB$ πρὸς τὸ $AΓB$ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν $ΔA$ τῷ AEH τριγώνῳ, τὸ δὲ $AΓB$ τῷ $AΘΓ$· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZEΔ$ πρὸς τὸ AEH τρίγωνον, τὸ ἀπὸ $ΓB$ πρὸς τὸ $AΘΓ$. ἐναλλάξ, ὡς τὸ ὑπο $ZEΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓB$, τὸ AEH τρίγωνον πρὸς τὸ $AΘΓ$. ὡς δὲ τὸ AHE πρὸς τὸ $AΘΓ$, τὸ ἀπὸ EA πρὸς τὸ ἀπὸ $AΓ$· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ $ZEΔ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓB$, τὸ ἀπο EA πρὸς τὸ ἀπὸ $AΓ$. καὶ ἐναλλάξ.

ιζ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, ληφθῇ δὲ ἐπὶ τῆς τομῆς δύο τυχόντα σημεῖα, καὶ ἀπ' αὐτῶν ἀχθῶσιν ἐν τῇ τομῇ παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὴν γραμμήν, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὰ περιεχόμενα ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ AB, καὶ τῆς AB ἐφαπτόμεναι αἱ $AΓ$, $ΓB$ συμπίπτουσαι κατὰ τὸ $Γ$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς τομῆς τυχόντα σημεῖα τὰ $Δ$, E, καὶ δι' αὐτῶν παρὰ τας $AΓ$, $ΓB$ ἤχθωσαν αἱ $EZIK$, $ΔZHΘ$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ $AΓ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΓB$, τὸ ὑπὸ KZE πρὸς τὸ ὑπὸ $ΘZΔ$.

ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν A, B διάμετροι αἱ $AΛMN$, $BOΞΠ$, καὶ ἐκβεβλήσθωσαν αἵ τε ἐφαπτόμεναι καὶ αἱ παράλληλοι μέχρι τῶν διαμέτρων, καὶ ἤχθωσαν ἀπὸ

8. $ΓB$] vpc, corr. ex $ΓEB$ m. 1 V. 24. ἀπὸ $AΓ$] $AΓ$ V; corr. p.

quare etiam [Eucl. V, 19] reliquum

$$ZE \times EΔ : ΔA = EK^2 : EAK.$$

est autem $EK^2 : EAK = ΓB^2 : AΓB$ [Eucl. VI, 4]; quare etiam $ZE \times EΔ : AΔ = ΓB^2 : AΓB$. est autem $ΔA = AEH$ et $AΓB = AΘΓ$; itaque etiam

$$ZE \times EΔ : AEH = ΓB^2 : AΘΓ.$$

permutando [Eucl. V, 16]

$$ZE \times EΔ : ΓB^2 = AEH : AΘΓ.$$

est autem [Eucl. VI, 4] $AHE : AΘΓ = EA^2 : AΓ^2$; itaque etiam $ZE \times EΔ : ΓB^2 = EA^2 : AΓ^2$. et permutando [Eucl. V, 16].

XVII.

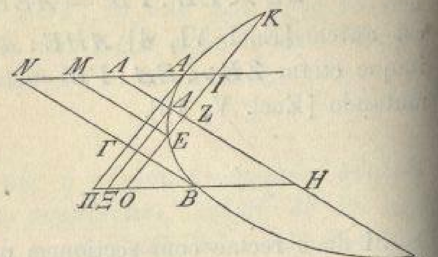
Si duae rectae coni sectionem uel ambitum circuli contingentes concurrunt, et in sectione duo quaelibet puncta sumuntur, ab iisque in sectione contingentibus parallelae ducuntur rectae et inter se et lineam secantes, erunt, ut quadrata contingentium inter se, ita rectangula comprehensa rectis eodem modo sumptis.

sit AB coni sectio uel ambitus circuli et AB contingentes $AΓ$, $ΓB$ in $Γ$ concurrentes, sumanturque in sectione puncta quaelibet $Δ$, E, et per ea rectis $AΓ$, $ΓB$ parallelae ducantur $EZIK$, $ΔZHΘ$. dico, esse $AΓ^2 : ΓB^2 = KZ \times ZE : ΘZ \times ZΔ$.

ducantur enim per A, B diametri $AΛMN$, $BOΞΠ$, producanturque et contingentes et parallelae usque ad diametros, et a $Δ$, E contingentibus parallelae ducantur $ΔΞ$, EM; manifestum igitur, esse $KI = IE$, $ΘH = HΔ$ [I, 46–47].

τῶν Δ, Ε παρὰ τὰς ἐφαπτομένας αἱ ΔΞ, ΕΜ· φανερὸν δή, ὅτι ἡ ΚΙ τῇ ΙΕ ἐστιν ἴση καὶ ἡ ΘΗ τῇ ΗΔ.

ἐπεὶ οὖν ἡ ΚΕ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ι, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΙ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΙ. καὶ ἐπεὶ ὅμοιά ἐστι τὰ τρίγωνα διὰ τὰς παραλλήλους, ἔστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΙΖ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΖΙΛ τρίγωνον. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς λοιπὸν τὸ ΖΜ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς ὅλον τὸ ΜΕΙ τρίγωνον. ἀλλ' ὡς τὸ ἀπὸ ΕΙ πρὸς τὸ ΙΜΕ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΓΑ πρὸς τὸ ΓΑΝ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΜ τετράπλευρον, οὕτως τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΑΝ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΑΓΝ τῷ ΓΠΒ, τὸ δὲ ΖΜ τῷ ΖΞ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ΓΒΠ. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καί, ὡς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ πρὸς τὸ ΞΖ, οὕτως τὸ ἀπὸ ΓΒ πρὸς τὸ ΓΠΒ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ΖΞ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς ΓΠΒ, διὰ δὲ τὸ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ΖΞ τετράπλευρον πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ, τὸ ΓΠΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΒ, δι' ἴσου ἄρα,



1. ΔΞ] c, corr. ex ΔΖ m. 1 V. 5. ΚΖΕ] ΖΚΕ V; corr. Memus. 18. ΙΜΕ] V?, ΙΕΜ cp. 19. ΓΑΝ] ἀπὸ ΓΑΝ V; corr. p. 25. ΓΠΒ] ΓΠ V; corr. Memus (gbp).

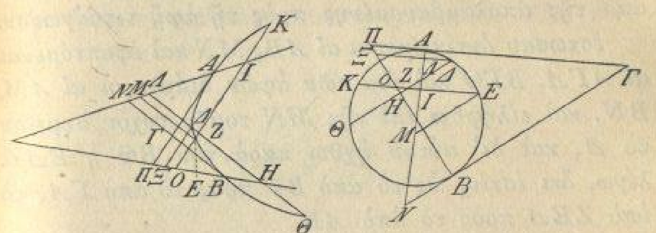
quoniam igitur KE in I in partes aequales secta est, in Z autem in inaequales, erit

$$KZ \times ZE + ZI^2 = EI^2 \text{ [Eucl. II, 5].}$$

et quoniam trianguli propter parallelas similes sunt [Eucl. I, 29], erit $EI^2 : IME = IZ^2 : ZI\Lambda$ [Eucl. VI, 19; V, 16]. itaque etiam reliquum [Eucl. V, 19]

$$KZ \times ZE : ZM = EI^2 : MEI.$$

est autem $EI^2 : IME = \Gamma A^2 : \Gamma A N$ [Eucl. VI, 19 V, 16]; itaque $KZ \times ZE : ZM = A\Gamma^2 : \Gamma A N$. est



autem $A\Gamma N = \Gamma \Pi B$ [prop. I] et $ZM = Z\Xi$ [prop. III]; itaque $KZ \times ZE : Z\Xi = A\Gamma^2 : \Gamma B \Pi$. iam similiter demonstrabimus, esse etiam

$$\Theta Z \times Z\Delta : \Xi Z = \Gamma B^2 : \Gamma \Pi B.$$

iam quoniam est $KZ \times ZE : Z\Xi = A\Gamma^2 : \Gamma\Pi B$ et e contrario [Eucl. V, 7 coroll.]

$$Z\Xi : \Theta Z \times Z\Delta = \Gamma\Pi B : \Gamma B^2,$$

ex aequo erit [Eucl. V, 22]

$$A\Gamma^2 : B\Gamma^2 = KZ \times ZE : \Theta Z \times Z\Delta.$$

In Vvc praeterea rectangula et trianguli quidam inueniuntur.

ὡς τὸ ἀπὸ ΛΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ, τὸ ὑπὸ ΚΖΕ πρὸς τὸ ὑπὸ ΘΖΔ.

ιηʹ.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσι, καὶ ληφθῇ τι σημεῖον ἐφ᾽ ὁποτερασοῦν τῶν τομῶν, καὶ ἀπ᾽ αὐτοῦ ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἐφαπτομένων τέμνουσα τὴν τομὴν καὶ τὴν ἑτέραν ἐφαπτομένην, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὶ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς ἐφαπτομένης πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΜΝ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΓΛ, ΒΓΘ καὶ διὰ τῶν ἁφῶν διάμετροι αἱ ΑΜ, ΒΝ, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς ΜΝ τομῆς τυχὸν σημεῖον τὸ Δ, καὶ δι᾽ αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὴν ΒΘ ἡ ΕΔΖ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΛ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΕ.

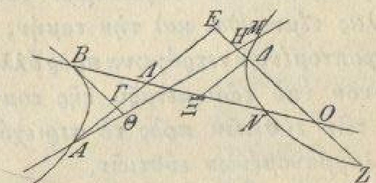
ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Δ τῇ ΛΕ παράλληλος ἡ ΔΞ. ἐπεὶ οὖν ὑπερβολή ἐστιν ἡ ΑΒ καὶ διάμετρος αὐτῆς ἡ ΒΝ καὶ ἐφαπτομένη ἡ ΒΘ καὶ τῇ ΒΘ παράλληλος ἡ ΔΖ, ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ΖΟ τῇ ΟΔ. καὶ πρόσκειται ἡ ΕΔ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΖΕΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΟ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΕΟ. καὶ ἐπεὶ παράλληλός ἐστιν ἡ ΕΛ τῇ ΔΞ, ὅμοιόν ἐστι τὸ ΕΟΛ τρίγωνον τῷ ΔΞΟ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΔΟ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ΞΔΟ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΔΕΖ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΟ πρὸς τὸ ΕΟΛ. ἀλλ᾽ ὡς τὸ ἀπὸ ΟΕ πρὸς τὸ ΟΕΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ

1. πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΓ] om. V; corr. p (τῆς ΓΒ). 15. ΕΔΖ] ΔΕΖ V; corr. p.

XVIII.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et in alterutra sectionum sumitur punctum aliquod, ab eoque recta alteri contingentium parallela ducitur sectionem alteramque contingentem secans, erit, ut quadrata contingentium inter se, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectionem contingentemque positis ad quadratum rectae ad punctum contactus abscisae.

sint oppositae AB, MN contingentesque $A\Gamma\Lambda$, $B\Gamma\Theta$ et per puncta contactus diametri AM, BN,



sumaturque in sectione MN punctum aliquod Δ, et per id rectae $B\Theta$ parallela ducatur $E\Delta Z$. dico, esse $B\Gamma^2 : \Gamma\Lambda^2 = ZE \times E\Delta : \Lambda E^2$.

ducatur enim per Δ rectae ΛE parallela $\Delta\Xi$. iam quoniam hyperbola est AB et diametrus eius BN contingensque $B\Theta$ et rectae $B\Theta$ parallela ΔZ, erit [I, 48] $ZO = O\Delta$. et adiecta est $E\Delta$; itaque erit [Eucl. II, 6] $ZE \times E\Delta + \Delta O^2 = EO^2$. et quoniam $E\Lambda$, $\Delta\Xi$ parallelae sunt, trianguli $EO\Lambda$, $\Delta\Xi O$ similes sunt [Eucl. I, 29]; itaque $EO^2 : EO\Lambda = \Delta O^2 : \Xi\Delta O$ [Eucl. VI, 19; V, 16]; quare etiam reliquum

$\Delta E \times EZ : \Delta\Lambda = EO^2 : EO\Lambda$ [Eucl. V, 19].

est autem $OE^2 : OE\Lambda = B\Gamma^2 : B\Gamma\Lambda$ [Eucl. VI, 19;

ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον· καὶ ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΔΛ τετράπλευρον, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΒΓΛ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ ΔΛ τετράπλευρον τῷ ΛΕΗ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΒΛΓ τῷ ΛΓΘ· ὡς ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ΛΕΗ, τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ΛΓΘ. ἔστι δὲ καὶ ὡς τὸ ΛΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ, οὕτως τὸ ΛΓΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΓ· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΒΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΛ, τὸ ὑπὸ ΖΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΛ.

ιθ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν, ἀχθῶσι δὲ παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις ἀλλήλας τέμνουσαι καὶ τὴν τομήν, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων τετράγωνα πρὸς ἄλληλα, οὕτως τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι, ὧν διάμετροι αἱ ΑΓ, ΒΔ, κέντρον δὲ τὸ Ε, καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΖ, ΖΔ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Ζ, καὶ ἀπό τινων σημείων ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ αἱ ΗΘΙΚΛ, ΜΝΞΟΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ προς τὸ ἀπὸ ΖΔ, τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς τὸ ὑπὸ ΜΛΞ.

ἤχθωσαν παρὰ τὰς ΑΖΔ διὰ τῶν Ξ, Ι αἱ ΙΠ, ΞΡ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ πρὸς τὸ ΑΖΣ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΘΛ πρὸς τὸ ΘΛΟ καὶ τὸ ἀπὸ ΘΙ πρὸς τὸ ΘΙΠ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΗΛΙ πρὸς λοιπὸν τὸ ΙΠΟΛ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΑΖ

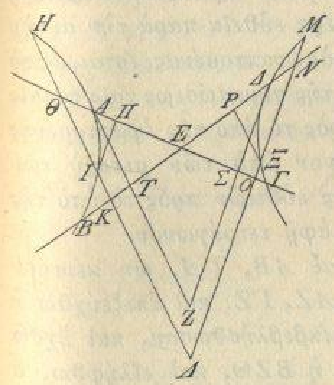
3. ΒΓΛ] ΒΓ V; corr. p. 18. αἱ] bis V; corr. cvp. 21. ΜΝΞΟΛ] ΜΝΞΟ V; corr. p. 23. ΗΛΙ] ΗΜ V; corr. p. 24. ΙΠ, ΞΡ] ΙΞ, ΠΡ V; corr. p.

V, 16]; quare etiam $ZE \times E\Delta : \Delta\Lambda = B\Gamma^2 : B\Gamma\Lambda$. est autem $\Delta\Lambda = \Lambda EH$ [prop. VI], $B\Lambda\Gamma = \Lambda\Gamma\Theta$ [prop. I]; itaque $ZE \times E\Delta : \Lambda EH = B\Gamma^2 : \Lambda\Gamma\Theta$. est autem etiam $\Lambda EH : E\Lambda^2 = \Lambda\Gamma\Theta : \Lambda\Gamma^2$ [Eucl. VI, 19; V, 16]. ex aequo igitur [Eucl. V, 22]

$$B\Gamma^2 : \Gamma\Lambda^2 = ZE \times E\Delta : E\Lambda^2.$$

XIX.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et ducuntur rectae contingentibus parallelae inter se sectionemque secantes, erit, ut quadrata contingentium inter se, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectionem punctumque concursus rectarum positis ad rectangulum comprehensum rectis eodem modo sumptis.



sint oppositae, quarum diametri sint $A\Gamma$, $B\Delta$, centrum autem E, et contingentes AZ, $Z\Delta$ concurrant in Z, et a punctis quibuslibet rectis $AZ, Z\Delta$ parallelae ducantur $H\Theta IK\Lambda$, $MN\Xi O\Lambda$. dico, esse

$$AZ^2 : Z\Delta^2 = H\Lambda \times \Lambda I : M\Lambda \times \Lambda\Xi.$$

per Ξ, I rectis AZ, $Z\Delta$ parallelae ducantur $I\Pi$, ΞP. et quoniam est $AZ^2 : AZ\Sigma = \Theta\Lambda^2 : \Theta\Lambda O = \Theta I^2 : \Theta I\Pi$ [Eucl. VI, 19; V, 16], erit etiam reliquum [I, 48; Eucl. II, 6]

$$H\Lambda \times \Lambda I : I\Pi O\Lambda = AZ^2 : AZ\Sigma \text{ [Eucl. V, 19].}$$

πρὸς τὸ $AZ\Sigma$ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ $AZ\Sigma$ τῷ ΔZT καὶ τὸ $\Pi O\Lambda I$ τῷ $KP\Xi\Lambda$· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ΔTZ, τὸ ὑπὸ $H\Lambda I$ πρὸς τὸ $P\Xi\Lambda K$. ὡς δὲ τὸ ΔTZ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Delta$, τὸ $P\Xi\Lambda K$ πρὸς τὸ ὑπὸ $M\Lambda\Xi$· καὶ δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ AZ πρὸς τὸ ἀπὸ $Z\Delta$, τὸ ὑπὸ $H\Lambda I$ πρὸς τὸ ὑπὸ $M\Lambda\Xi$.

κ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν συμπίπτουσα ἑκατέρᾳ τῶν τομῶν, ἀχθῇ δέ τις ἑτέρα εὐθεῖα παρὰ τὴν αὐτὴν τέμνουσα τάς τε τομὰς καὶ τὰς ἐφαπτομένας, ἔσται, ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς ἐφαπτομένης εὐθειῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἀπολαμβανομένης πρὸς τῇ ἁφῇ τετράγωνον.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, $\Gamma\Delta$, ὧν κέντρον τὸ E, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ AZ, ΓZ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Gamma$ καὶ αἱ EZ, AE καὶ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Z παρὰ τὴν $A\Gamma$ ἡ $BZ\Theta$, καὶ εἰλήφθω, ὃ ἔτυχε, σημεῖον τὸ K, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν $A\Gamma$ ἤχθω ἡ $K\Lambda\Sigma MN\Xi$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ $BZ\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὶ $Z A$, τὸ ὑπὸ $K\Lambda\Xi$ πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Lambda$.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν K, B παρὰ τὴν AZ αἱ $K\Pi$, BP. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ BZ πρὸς τὶ

3. $H\Lambda I$] HM V; corr. Memus. 16. εὐθειῶν] εὐθείας V; corr. Comm. 24. $K\Lambda\Xi$] $\Lambda K\Xi$ V; corr. Memus (hlx).

est autem $AZ\Sigma = \Delta ZT$ [prop. IV] et [prop. VII] $\Pi O\Lambda I = KP\Xi\Lambda$; quare etiam

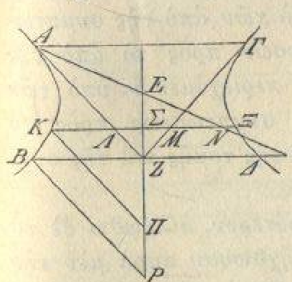
$$AZ^2 : \Delta TZ = H\Lambda \times \Lambda I : P\Xi\Lambda K.$$

est autem $\Delta TZ : Z\Delta^2 = P\Xi\Lambda K : M\Lambda \times \Lambda\Xi$. ergo etiam ex aequo [Eucl. V, 22]

$$AZ^2 : Z\Delta^2 = H\Lambda \times \Lambda I : M\Lambda \times \Lambda\Xi.$$

XX.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et per punctum concursus recta ducitur rectae puncta contactus coniungenti parallela cum utraque sectione concurrens, et alia quoque recta eidem parallela ducitur et sectiones et contingentes secans, erit, ut rectangulum rectis a puncto concursus ad sectiones adcidentibus comprehensum ad quadratum contingentis, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones contingentemque positis ad quadratum rectae ad punctum contactus abscisae.



sint oppositae AB, $\Gamma\Delta$, quarum centrum sit E, contingentes autem AZ, ΓZ, ducaturque $A\Gamma$ et EZ, AE et producantur, per Z autem rectae $A\Gamma$ parallela ducatur $BZ\Theta$, et sumatur quoduis punctum K, et per id rectae $A\Gamma$ parallela ducatur $K\Lambda\Sigma MN\Xi$. dico, esse $BZ \times Z\Delta : Z A^2 = K\Lambda \times \Lambda\Xi : A\Lambda^2$.

ducantur enim a K, B rectae AZ parallelae $K\Pi$, BP. iam quoniam est

In fig. pro K (Vp) posuerunt H Memus aliique.

ΒΖΡ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΚΣ πρὸς τὸ ΚΣΠ καὶ τὸ ἀπὸ ΛΣ πρὸς τὸ ΛΣΖ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΚΛΖΠ τετράπλευρον, ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΒΖ τῷ ὑπι ΒΖΔ, τὸ δὲ ΒΡΖ τρίγωνον τῷ ΑΖΘ, τὸ δὲ ΚΛΖΠ τετράπλευρον τῷ ΑΛΝ τριγώνῳ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὶ ΑΖΘ τρίγωνον, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὸς τὸ ΑΛΝ. ὡς δὲ τὶ ΑΖΘ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΖ, τὸ ΑΛΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ ΒΖΔ πρὸς τὸ ἀπι ΖΑ, τὸ ὑπὸ ΚΛΞ πρὶς τὸ ἀπὸ ΑΛ.

κα΄.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἐπὶ τῆς τομῆς δύο σημεῖα ληφθῇ, καὶ δι' αὐτῶν ἀχθῶσιν εὐθεῖαι ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, τέμνουσαι ἀλλήλας τε καὶ τὰς τομάς, ἔσται, ὡς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀπὸ τῆς συμπτώσεως ταῖς τομαῖς προσπιπτουσῶν πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐφαπτομένης τετράγωνον, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, εἰλήφθω δὲ τὰ Η, Κ σημεῖα, καὶ δι' αὐτῶν ἤχθωσαν παρὰ μὲν τὴν ΑΖ αἱ ΝΞΗΟΠΡ, ΚΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΑΓ αἱ

1. ΚΣΠ] ἀπὸ ΚΣΠ V; corr. p. 2. ΛΣΖ] ΛΕΖ V; corr. p (ΛΖΣ). ΚΛΞ] ΛΚΞ corr. ex ΛΚΖ m. 1 V; corr. Memus (hlx). 3. Ante ἴσον add. ἔσται ὡς τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ΒΖΡ Halley cum Command.; lacunam p. 6. ὑπὸ ΒΖΔ] ἀπὸ ΒΖ V; corr. Memus. τό] (alt.) om. V; corr. p. 7. ΚΛΞ] ΛΚΞ V; corr. Memus (hlx). ΑΛΝ] ΑΛΜ V; corr. p. 10. ΚΛΞ] ΛΚΞ V; corr. Memus (hlx). 19. πρός — 20. συμπτώσεως] om. V; corr. Comm.

$$BZ^2 : BZP = K\Sigma^2 : K\Sigma\Pi$$
$$= \Lambda\Sigma^2 : \Lambda\Sigma Z \text{ [Eucl. VI, 19; V, 16]}$$
$$= K\Lambda \times \Lambda\Xi \text{ [Eucl. II, 5]} : K\Lambda Z\Pi \text{ [Eucl. V, 19]},$$

et $BZ^2 = BZ \times Z\Delta$ [II, 39, 38], $BPZ = AZ\Theta$ [prop. XI], $K\Lambda Z\Pi = A\Lambda N$ [prop. V], erit

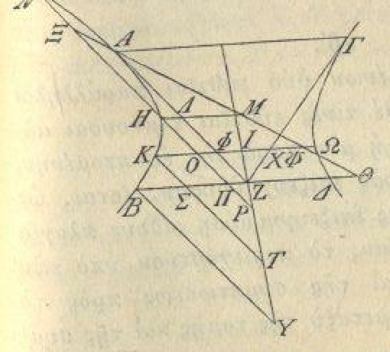
$$BZ \times Z\Delta : AZ\Theta = K\Lambda \times \Lambda\Xi : A\Lambda N.$$

est autem $AZ\Theta : AZ^2 = A\Lambda N : A\Lambda^2$ [Eucl. VI, 19; V, 16]; ergo ex aequo [Eucl. V, 22]

$$BZ \times Z\Delta : ZA^2 = K\Lambda \times \Lambda\Xi : A\Lambda^2.$$

XXI.

Iisdem suppositis si in sectione duo puncta sumuntur, et per ea rectae ducuntur, altera contingenti parallela, altera rectae puncta contactus coniungenti parallela, secantes et inter se et sectiones, erit, ut rectangulum comprehensum rectis a puncto concursus ad sectiones adcidentibus ad quadratum contingentis, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones punctumque concursus positis ad rectangulum comprehensum rectis inter sectionem punctumque concursus positis.



sint enim eadem, quae antea, et sumantur H, K puncta, per eaque rectae AZ parallelae ducantur

ΗΛΜ, ΚΟΦΙΧΨΩ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ *ΒΖΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΖΑ*, οὕτως τὸ ὑπὸ *ΚΟΩ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΝΟΗ.*

ἐπεὶ γάρ ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ *ΑΖ* πρὸς τὸ *ΑΖΘ* τρίγωνον, τὸ ἀπὸ *ΑΛ* πρὸς τὸ *ΑΛΜ* καὶ τὸ ἀπὸ *ΞΟ* πρὸς τὸ *ΞΟΨ* καὶ τὸ ἀπὸ *ΞΗ* πρὸς τὸ *ΞΗΜ*, ὡς ἄρα ὅλον τὸ ἀπὸ *ΞΟ* πρὸς ὅλον τὸ *ΞΟΨ*, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ *ΞΗ* πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ *ΞΗΜ.* καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ *ΝΟΗ* πρὸς λοιπὸν τὸ *ΗΟΨΜ* τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ *ΑΖ* πρὸς τὸ *ΑΖΘ.* ἴσον δὲ τὸ μὲν *ΑΖΘ* τῷ *ΒΥΖ*, τὸ δὲ *ΗΟΨΜ* τῷ *ΚΟΡΤ*· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ *ΑΖ* πρὸς τὸ *ΒΖΥ*, τὸ ὑπὸ *ΝΟΗ* πρὸς τὸ *ΚΟΡΤ.* ὡς δὲ τὸ *ΒΥΖ* τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ *ΒΖ*, τουτέστι τὸ ὑπὸ *ΒΖΔ*, οὕτως ἐδείχθη τὸ *ΚΟΡΤ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΚΟΩ*· δι' ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ *ΑΖ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΒΖΔ*, τὸ ὑπὸ *ΝΟΗ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΚΟΩ.* καὶ ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ *ΒΖΔ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΖΑ*, τὸ ὑπὸ *ΚΟΩ* πρὸς τὸ ὑπὸ *ΝΟΗ.*

κβ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι παράλληλοι ἐπιψαύωσιν, ἀχθῶσι δέ τινες εὐθεῖαι τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς, ἡ μὲν παρὰ τὴν ἐφαπτομένην, ἡ δὲ παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ἡ τοῦ πρὸς τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως.

---

7. τό] (alt.) pcv, e corr. m. 1 V. 12. *ΚΟΡΠ* V; corr. Memus. 14. *ΚΟΡΤ*] pc, *Τ* corr. ex *Π* m. 1 V. 17. *ΚΟΩ*] c, corr. ex *ΚΟ, ΟΩ* m. 1 V. 24. ἡ] p, om. V. 25. πλευραὶ V; corr. p. 26. τῶν τομῶν — 27. μεταξύ] om. V; corr. Paris. 2355 mg.

$N\Xi HO\Pi P$, $K\Sigma T$, rectae autem $\Lambda\Gamma$ parallelae $H\Lambda M$, $KO\Phi IX\Psi\Omega$[1]). dico, esse

$$BZ \times Z\Delta : ZA^2 = KO \times O\Omega : NO \times OH.$$

quoniam enim est

$$AZ^2 : AZ\Theta = A\Lambda^2 : A\Lambda M$$
$$= \Xi O^2 : \Xi O\Psi = \Xi H^2 : \Xi HM \text{ [Eucl. VI, 19; V, 16]},$$

erit, ut totum ΞO^2 ad totum $\Xi O\Psi$, ita ablatum ΞH^2 ad ablatum ΞHM. itaque etiam reliquum [I, 47; Eucl. II, 6] $NO \times OH : HO\Psi M = AZ^2 : AZ\Theta$ [Eucl. V, 19]. est autem $AZ\Theta = B\Upsilon Z$ [prop. XI], $HO\Psi M = KOPT$ [prop. XII]; itaque

$$AZ^2 : BZ\Upsilon = NO \times OH : KOPT.$$

demonstrauimus autem, esse

$$B\Upsilon Z : BZ^2 = KOPT : KO \times O\Omega \text{ [prop. XX]}$$
$$= \text{[I, 39, 38] } B\Upsilon Z : BZ \times Z\Delta;$$

itaque ex aequo [Eucl. V, 22]

$$AZ^2 : BZ \times Z\Delta = NO \times OH : KO \times O\Omega.$$

et e contrario [Eucl. V, 7 coroll.]

$$BZ \times Z\Delta : ZA^2 = KO \times O\Omega : NO \times OH.$$

XXII.

Si sectiones oppositas duae rectae parallelae contingunt, et ducuntur rectae quaedam secantes et inter se et sectiones, altera contingenti parallela, altera rectae puncta contactus coniungenti parallela, erit, ut latus transuersum figurae rectae puncta contactus coniungenti adplicatae ad rectum, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones punctumque con-

---

1) In figura codicis V punctum Ψ intra sectionem $\Gamma\Delta$ cadit, ita ut haec recta dicenda esset $KO\Phi IX\Omega\Psi$. adiecta sunt sex rectangula.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΓ, ΒΔ παράλληλοι ἔστωσαν, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ. διήχθωσαν δὴ ἡ μὲν ΕΞΗ παρὰ τὴν ΑΒ, ἡ δὲ ΚΕΛΜ παρὰ τὴν ΑΓ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν τοῦ εἴδους πλευράν, το ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

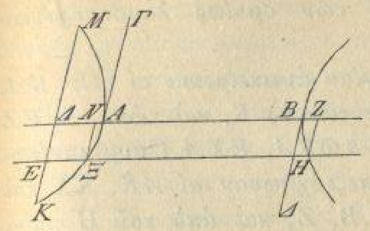
ἤχθωσαν διὰ τῶν Η, Ξ παρὰ τὴν ΑΓ αἱ ΞΝ, ΗΖ. ἐπεὶ γὰρ αἱ ΑΓ, ΒΔ ἐφαπτόμεναι τῶν τομῶν παράλληλοί εἰσι, διάμετρος μὲν ἡ ΑΒ, τεταγμένως δὲ ἐπ' αὐτὴν κατηγμέναι αἱ ΚΛ, ΞΝ, ΗΖ· ἔσται οὖν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν πλευράν, τό τε ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΚ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΝΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΛΕ. ἔστιν ἄρα, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΒΛΑ πρὸς ὅλον τὸ ἀπὸ ΚΛ, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΒΝΑ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΖΛΝ· ἴση γὰρ ἡ ΝΑ τῇ ΒΖ· πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ἀπὸ ΛΕ· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΖΛΝ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΚΕΜ ἐστιν, ὡς ἡ ΑΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΖΛΝ τῷ ὑπὸ ΗΕΞ· ὡς ἄρα ἡ ΑΒ τοῦ εἴδους πλαγία πλευρὰ πρὸς τὴν ὀρθίαν, τὸ ὑπὸ ΗΕΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΕΜ.

κγ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατα συζυγίαν ἀντικειμέναις δύο εὐθεῖαι τῶν κατ' ἐναντίον τομῶν ἐπιψαύουσαι συμπίπτωσιν ἐπὶ μιᾶς, ἧς ἔτυχον, τομῆς, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς ἐφαπτομένας τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς ἑτέρας ἀντικειμένας, ἔσται, ὡς τὰ ἀπὸ τῶν ἐφαπτομένων

3. δή] δέ Halley. 4. ΕΚΛΜ V, corr. p. 8. γάρ] οὖν? 24. συμπίπτουσιν v, V (ου corr. in ω?); corr. pc.

cursus positis ad rectangulum comprehensum rectis inter sectionem punctumque concursus positis.



sint oppositae A, B, easque contingentes $A\Gamma, B\Delta$ parallelae sint, et ducatur AB. ducantur igitur rectae AB parallela $E\Xi H$, rectae $A\Gamma$ autem parallela $KE\Lambda M$. dico, esse, ut AB ad latus rectum figurae, ita $HE \times E\Xi : KE \times EM$.

per H, Ξ rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur $\Xi N, HZ$. iam quoniam $A\Gamma, B\Delta$ sectiones contingentes parallelae sunt, diametrus est AB et ad eam ordinate ductae $K\Lambda, \Xi N, HZ$ [II, 31]; erit igitur [I, 21] AB: latus rectum

$$= B\Lambda \times \Lambda A : \Lambda K^2 = BN \times NA : N\Xi^2$$
$$= BN \times NA : \Lambda E^2 \text{ [Eucl. I, 34].}$$

est igitur, ut totum $B\Lambda \times \Lambda A$ ad totum ΛK^2, ita ablatum $BN \times NA$, hoc est $Z\Lambda \times \Lambda N$ (nam $NA = BZ$ [I, 21]), ad ablatum ΛE^2; quare etiam reliquum [u. Pappi lemma IV] $Z\Lambda \times \Lambda N$ ad reliquum [I, 47; Eucl. II, 5] $KE \times EM$ est, ut AB ad latus rectum. est autem $Z\Lambda \times \Lambda N = HE \times E\Xi$ [Eucl. I, 34]; ergo ut AB latus figurae transuersum ad rectum, ita $HE \times E\Xi : KE \times EM$.

XXIII.

Si in oppositis coniugatis duae rectae sectiones inter se oppositas contingentes in quauis sectionum concurrunt, et contingentibus parallelae rectae duτετράγωνα πρὸς ἄλληλα, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν μεταξὺ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως εὐθειῶν πρὸς τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ὁμοίως λαμβανομένων εὐθειῶν.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ, κέντρον δὲ αὐτῶν τὸ Κ, καὶ τῶν ΑΒ, ΕΖ τομῶν ἐφαπτόμεναι αἱ ΑΦΓΛ, ΕΧΔΛ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΚ, ΕΚ καὶ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ Β, Ζ, καὶ ἀπὸ τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΛ ἤχθω ἡ ΗΜΝΞΟ, ἀπὸ δὲ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΛ ἡ ΘΠΡΞΣ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΑ, τὸ ὑπο ΘΞΣ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Σ παρὰ μὲν τὴν ΑΛ ἡ ΣΤ, παρὰ δὲ τὴν ΕΛ ἀπὸ τοῦ Ο ἡ ΟΥ. ἐπεὶ οὖν συζυγῶν ἀντικειμένων τῶν ΑΒ, ΓΔ, ΕΖ, ΗΘ διάμετρός ἐστιν ἡ ΒΕ, καὶ ἐφάπτεται τῆς τομῆς ἡ ΕΛ, καὶ παρ' αὐτὴν ἦκται ἡ ΘΣ, ἴση ἐστὶν ἡ ΘΠ τῇ ΠΣ, καὶ διὰ τὰ αὐτὰ ἡ ΗΜ τῇ ΜΟ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΕΦΛ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΠΣ πρὸς τὸ ΠΤΣ καὶ το ἀπὸ ΠΞ πρὸς τὸ ΠΝΞ, καὶ λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΤΝΞΣ τετράπλευρόν ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΦΛΕ τρίγωνον. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΕΦΛ τρίγωνον τῷ ΑΛΧ, τὸ δὲ ΤΝΞΣ τετράπλευρον τῷ ΞΡΥΟ· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΛ πρὸς τὸ ΑΛΧ, τὸ ὑπὸ ΘΞΣ πρὸς τὸ ΞΟΥΡ τετράπλευρον. ἔστι δέ, ὡς τὸ ΑΧΛ τρίγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΛ, τὸ ΞΡΥΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΗΞΟ· δι' ἴσου

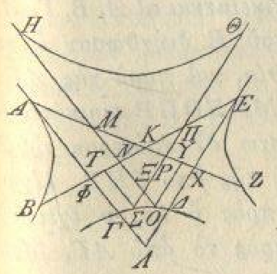
10. ΜΝΞΟ V; corr. p. 11. ΕΛ] pcv, corr. ex ΕΘ m. 1 V. 15. Ο ἡ ΟΥ] $\overline{οη}$ $\overline{ου}$ V; corr. 2355 mg. 22. ΘΞΣ] ΘΣΞ corr. ex ΘΓΞ m. 1 V; corr. Memus.

cuntur secantes et inter se et sectiones oppositas alteras, erit, ut quadrata contingentium inter se, ita rectangulum comprehensum rectis inter sectiones punctumque concursus positis ad rectangulum comprehensum rectis eodem modo sumptis.

sint oppositae coniugatae AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$, centrum autem earum K, et $A\Phi\Gamma\Lambda$, $EX\Delta\Lambda$ sectiones AB, EZ contingentes in Λ concurrant, ducanturque AK, EK et producantur ad B, Z, ab H autem rectae $A\Lambda$ parallela ducatur $HMN\Xi O$ et a Θ rectae $E\Lambda$ parallela $\Theta\Pi P\Xi\Sigma$. dico, esse

$$E\Lambda^2 : \Lambda A^2 = \Theta\Xi \times \Xi\Sigma : H\Xi \times \Xi O.$$

per Σ enim ducatur ΣT rectae $A\Lambda$ parallela, ab O autem $O\Upsilon$ rectae $E\Lambda$ parallela. iam quoniam oppositarum coniugatarum AB, $\Gamma\Delta$, EZ, $H\Theta$ diametrus est BE, et $E\Lambda$ sectionem contingit, eique parallela ducta est $\Theta\Sigma$, erit [II, 20; I def. 5] $\Theta\Pi = \Pi\Sigma$ et eadem de causa $HM = MO$. et quoniam est



$$E\Lambda^2 : E\Phi\Lambda = \Pi\Sigma^2 : \Pi T\Sigma = \Pi\Xi^2 : \Pi N\Xi$$

[Eucl. VI, 19; V, 16], erit etiam reliquum [Eucl. II, 5] $\Theta\Xi \times \Xi\Sigma : TN\Xi\Sigma = E\Lambda^2 : \Phi\Lambda E$ [Eucl. V, 19]. est autem [prop. IV] $E\Phi\Lambda = A\Lambda X$ et[1])

$$TN\Xi\Sigma = \Xi P\Upsilon O;$$

itaque $E\Lambda^2 : A\Lambda X = \Theta\Xi \times \Xi\Sigma : \Xi O\Upsilon P$. est autem

1) Ex prop. XV, quae tum quoque ualet, cum rectae contingentes suam quaeque sectionum oppositarum contingunt.

ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $EΛ$ πρὸς τὸ ἀπὸ $ΛΛ$, τὸ ὑπὸ $ΘΞΣ$ προς το ὑπὸ $HΞO$.

κδ'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις ἀπὸ τοῦ κέντρου διαχθῶσι πρὸς τὰς τομὰς δύο εὐθεῖαι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν πλαγία διάμετρος, ἡ δὲ ὀρθία, ἀχθῶσι δέ τινες παρὰ τὰς δύο διαμέτρους συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, ἡ δὲ σύμπτωσις ᾖ τῶν εὐθειῶν ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τεσσάρων τομῶν, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, ὃν το ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον, ἴσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

ἔστωσαν κατα συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, $Γ$, $Δ$, ὧν κέντρον το E, καὶ ἀπὸ τοῦ E διήχθωσαν ἥ τε $AEΓ$ πλαγία καὶ ἡ $ΔEB$ ὀρθία, καὶ παρὰ τὰς $AΓ$, $ΔB$ ἤχθωσαν αἱ $ZHΘIKΛ$, $MNΞOΠP$ συμπίπτουσαι ἀλλήλαις κατὰ τὸ $Ξ$· ἔστω δὲ πρότερον τὸ $Ξ$ ἐντὸς τῆς ὑπὸ $ΣEΦ$ γωνίας ἢ τῆς ὑπὸ $ΥET$. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ $ZΞΛ$ μετὰ τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ $MΞP$, ὃν τὸ ἀπὸ $ΔB$ πρὸς τὸ ἀπὸ $AΓ$, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ AE.

ἤχθωσαν γὰρ ἀσύμπτωτοι τῶν τομῶν αἱ $ΣET$, $ΥEΦ$, καὶ διὰ τοῦ A ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ $ΣHAΦ$. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ $ΣAΦ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΔE$, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ $ΣAΦ$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, οὕτως τὸ ἀπὸ $ΔE$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA. τὸ δὲ ὑπὸ

1. τὸ ὑπό] τοῦ V; corr. p. 9. ἐν] cv, euan. V. 11. ὃ λόγον] ὅλον V; corr. p. 26. $ΣHAΦ$] $AHΣΦ$ V; corr. p ($ΦAHΣ$).

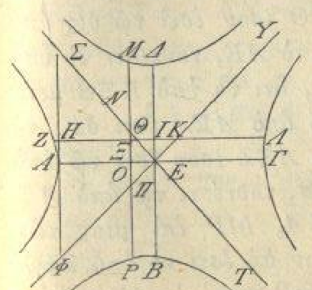
[eodem modo] $AXΛ : AΛ^2 = ΞPΥO : HΞ \times ΞO$. ergo ex aequo [Eucl. V, 22]

$$EΛ^2 : AΛ^2 = ΘΞ \times ΞΣ : HΞ \times ΞO.$$

XXIV.

Si in oppositis coniugatis a centro ad sectiones duae rectae ducuntur, et altera earum diametrus transuersa, altera recta sumitur, duabus autem diametris illis parallelae rectae quaedam ducuntur et inter se et cum sectionibus concurrentes, et punctum concursus in spatio inter quattuor sectiones posito est, rectangulum comprehensum partibus rectae diametro transuersae parallelae cum spatio, ad quod rectangulum comprehensum partibus rectae diametro rectae parallelae rationem habet, quam quadratum diametri rectae ad quadratum transuersae, aequale erit duplo quadrato dimidiae diametri transuersae.

sint A, B, $Γ$, $Δ$ oppositae coniugatae, quarum centrum sit E, et ab E ducatur $AEΓ$ diametrus transuersa et $ΔEB$ recta, rectisque $AΓ$, $ΔB$ parallelae ducantur $ZHΘIKΛ$, $MNΞOΠP$ in $Ξ$ inter se concurrentes; $Ξ$ autem prius intra angulum $ΣEΦ$ uel $ΥET$ positum sit. dico, $ZΞ \times ΞΛ$ cum spatio, ad quod $MΞ \times ΞP$ rationem habet, quam $ΔB^2 : AΓ^2$, aequale esse spatio $2AE^2$.



ducantur enim $ΣET$, $ΥEΦ$ asymptotae sectionum, et

In hac propositione duas tantum figuras habet V.

ΣΑΦ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ τῆς ΣΑ πρὸς ΑΕ καὶ τοῦ τῆς ΦΑ πρὸς ΑΕ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΣΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΝΞ πρὸς ΞΘ, ὡς δὲ ἡ ΦΑ πρὸς ΑΕ, ἡ ΠΞ πρὸς ΞΚ· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ λόγος σύγκειται ἔκ τε τοῦ τῆς ΝΞ πρὸς ΞΘ καὶ τοῦ τῆς ΠΞ πρὸς ΞΚ. σύγκειται δὲ ἐκ τῶν αὐτῶν ὁ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, το ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ. καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ἀπὸ ΔΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΠΞΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπο ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΝ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΡΝΜ, τὸ δὲ ἀπὶ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΛΘΖ· ὡς ἄρα το ἀπο ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΡΝΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΘΖ. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ ΠΞΝ μετὰ τοῦ υπο ΡΝΜ τῷ ὑπὸ ΡΞΜ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπο ΕΑ, τὸ ὑπο ΡΞΜ πρὸς τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ. δεικτέον οὖν, ὅτι τὸ ὑπὸ ΖΞΛ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΚΞΘ καὶ τοῦ ὑπὸ ΚΖΘ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΕΑ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ ΑΕ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΚΖΘ· λοιπον ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ ΚΞΘ μετὰ τοῦ ὑπὸ ΛΞΖ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΛΘΖ, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΚΖΘ, τουτέστι τῷ ἀπὸ ΑΕ.

συμπιπτέτωσαν δὴ αἱ ΖΛ, ΜΡ ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων κατὰ τὸ Θ. ἴσον δή ἐστι τὸ ὑπὸ ΖΘΛ τῷ ἀπὸ ΑΕ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΘΡ τῷ ἀπὸ ΔΕ· ἔστιν

13. ΛΘΖ] ΛΘΞ V; corr. Memus. 16. ΛΘΖ] ΛΘΞ V; corr. Memus. 17. ΡΝΜ] ΡΜΝ V; corr. p (τῶν ΡΝ, ΝΜ). 25. ΛΘΖ] ΛΖΘ V; corr. Memus.

per A sectionem contingens $\Sigma H A \Phi$. iam quoniam est $\Sigma A \times A\Phi = \Delta E^2$ [I, 56; II, 1], erit [Eucl. V, 7] $\Sigma A \times A\Phi : EA^2 = \Delta E^2 : EA^2$. est autem

$$\Sigma A \times A\Phi : AE^2 = (\Sigma A : AE) \times (\Phi A : AE).$$

uerum $\Sigma A : AE = N\Xi : \Xi\Theta$, $\Phi A : AE = \Pi\Xi : \Xi K$ [Eucl. VI, 4]; itaque

$$\Delta E^2 : AE^2 = (N\Xi : \Xi\Theta) \times (\Pi\Xi : \Xi K)$$
$$= \Pi\Xi \times \Xi N : K\Xi \times \Xi\Theta$$
$$= \Delta E^2 + \Pi\Xi \times \Xi N : AE^2 + K\Xi \times \Xi\Theta \text{ [Eucl. V, 12].}$$

est autem $\Delta E^2 = \Pi M \times MN$ [II, 11] $= PN \times NM$ [II, 16], et [eodem modo]

$$AE^2 = KZ \times Z\Theta = \Lambda\Theta \times \Theta Z;$$

erit igitur

$$\Delta E^2 : EA^2$$
$$= \Pi\Xi \times \Xi N + PN \times NM : K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Theta \times \Theta Z.$$

est autem $\Pi\Xi \times \Xi N + PN \times NM = P\Xi \times \Xi M$ [u. Pappi lemma V, 2]; itaque

$$\Delta E^2 : EA^2 = P\Xi \times \Xi M : K\Xi \times \Xi\Theta + KZ \times Z\Theta.$$

demonstrandum igitur, esse

$$Z\Xi \times \Xi\Lambda + K\Xi \times \Xi\Theta + KZ \times Z\Theta = 2EA^2.$$

auferatur, quod commune est, $AE^2 = KZ \times Z\Theta$. itaque reliquum est, ut demonstremus, esse

$$K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Xi \times \Xi Z = AE^2.$$

et est; nam

$$K\Xi \times \Xi\Theta + \Lambda\Xi \times \Xi Z = \Lambda\Theta \times \Theta Z$$
$$= KZ \times Z\Theta \text{ [u. Pappi lemma V, 1]} = AE^2.$$

iam uero $Z\Lambda$, MP in altera asymptotarum concurrant in Θ. itaque $Z\Theta \times \Theta\Lambda = AE^2$ et

$$M\Theta \times \Theta P = \Delta E^2 \text{ [II, 11, 16];}$$

itaque $\Delta E^2 : EA^2 = M\Theta \times \Theta P : Z\Theta \times \Theta\Lambda$. uolumus igitur, esse $2Z\Theta \times \Theta\Lambda = 2AE^2$. et est.

ἄρα, ὡς το ἀπὸ $ΔE$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ ὑπὸ $MΘP$ πρὸς τὶ ὑπὸ $ZΘΛ$. ὥστε τὸ δὶς ὑπὸ $ZΘΛ$ ἴσον ζητοῦμεν τῷ δὶς ἀπὸ $ΛE$. ἔστι δέ.

ἔστω δὲ τὸ $Ξ$ ἐντὸς τῆς ὑπο $ΣEK$ γωνίας ἢ τῆς ὑπο $ΦET$. ἔσται δὴ ὁμοίως διὰ τὴν συναφὴν τῶν λόγων, ὡς τὸ ἀπὸ $ΔE$ πρὸς τὸ ἀπὸ EA, τὸ ὑπὸ $ΠΞN$ προς τὸ ὑπὸ $KΞΘ$. τῷ δὲ ἀπὸ $ΔE$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ $ΠMN$, τουτέστι τὸ ὑπὸ PNM, τῷ δὲ ἀπο $ΔE$ ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ $ΛΘZ$· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ υπο PNM προς τὸ ὑπὸ $ΛΘZ$, οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπο $ΠΞN$ πρὸς ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ $KΞΘ$. καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ $PΞM$ πρὸς λοιπὴν την ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει το ἀπο $ΛE$ τοῦ ὑπὸ $KΞΘ$. δεικτέον ἄρα, ὅτι το ὑπὸ $ZΞΛ$ προσλαβὸν τὴν ὑπεροχήν, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ $ΛE$ τοῦ ὑπὸ $KΞΘ$, ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ $ΛE$. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ $ΛE$, τουτέστι τὸ ὑπὸ $ZΘΛ$· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ $KΞΘ$ μετα τῆς ὑπεροχῆς, ᾗ ὑπερέχει τὸ ἀπὸ $ΛE$ τοῦ ὑπὸ $KΞΘ$, ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΛE$. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ἔλασσον το ὑπὸ $KΞΘ$ προσλαβον τὴν ὑπεροχὴν ἴσον ἐστὶ τῷ μείζονι τῷ ἀπὸ $ΛE$.

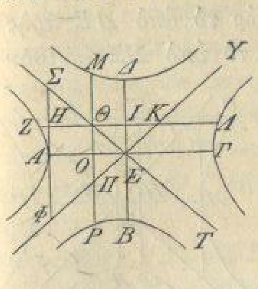
κε'.

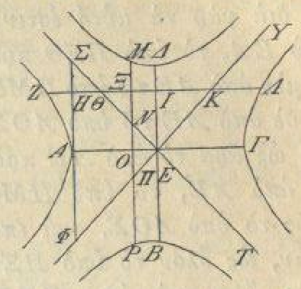
Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἔστω ἡ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ταῖς $ΛΓ$, $BΔ$ ἐντὸς μιᾶς τῶν $Δ$, B τομῶν, ὡς ὑπόκειται, κατὰ τὸ $Ξ$.

λέγω, ὅτι τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ $OΞN$, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημά-

8. τό] (pr.) τῷ V; corr. p. 9. τό] (pr.) c, τῷ Vp. 10. $ΛΘZ$] $ΘΛZ$ V; corr. Memus. 13. Post $KΞΘ$ add. ἐστιν ὡς

iam uero $Ξ$ intra angulum $ΣEK$ uel $ΦET$ positum sit. itaque eodem modo propter compositionem rationum erit $ΔE^2 : EA^2 = ΠΞ \times ΞN : KΞ \times ΞΘ$.





est autem $ΠM \times MN = ΔE^2$ [II, 11] $= PN \times NM$ [II, 16], et $ΛΘ \times ΘZ = ΛE^2$ [II, 11, 16]. itaque est $PN \times NM : ΛΘ \times ΘZ = ΠΞ \times ΞN : KΞ \times ΞΘ$. quare etiam reliquum [u. Pappi lemma V, 1]

$$PΞ \times ΞM : ΛE^2 \div KΞ \times ΞΘ = ΔE^2 : EA^2$$

[Eucl. V, 19]. demonstrandum igitur, esse

$$ZΞ \times ΞΛ + (ΛE^2 \div KΞ \times ΞΘ) = 2\,ΛE^2.$$

auferatur, quod commune est, $ΛE^2 = ZΘ \times ΘΛ$. itaque reliquum est, ut demonstremus, esse [u. Pappi lemma V, 2] $KΞ \times ΞΘ + (ΛE^2 \div KΞ \times ΞΘ) = ΛE^2$. et est; nam $KΞ \times ΞΘ + ΛE^2 \div KΞ \times ΞΘ = ΛE^2$.

XXV.

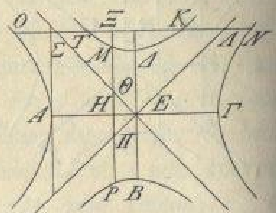
Iisdem suppositis punctum concursus rectarum rectis $ΛΓ$, $BΔ$ parallelarum intra alterutram sectionum $Δ$, B positum sit, sicut infra descriptum est, in $Ξ$.

dico, rectangulum comprehensum partibus rectae diametro transuersae parallelae, hoc est $OΞ \times ΞN$,

τὸ ἀπὸ $ΔE$ πρὸς τὸ ἀπὸ $EΛ$ Halley praeeunte Commandino. 18. τοῦ — 19. $ΛE$] bis V; corr. pc.

των τῆς παραλλήλου τῇ ὀρθίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΜ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, μεῖζον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

διὰ γὰρ τὰ αὐτά ἐστιν, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΑ, τὸ ὑπὸ ΠΞΘ προς τὸ ὑπὸ ΣΞΛ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔΕ τῷ ὑπὸ ΠΜΘ, τὸ δὲ ἀπὸ ΑΕ τῷ ὑπὸ ΛΟΣ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ, τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς τὸ ὑπὸ ΛΟΣ. καὶ ἐπεί ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ὑπὸ ΠΞΘ πρὸς ὅλον τὸ ὑπο ΛΞΣ,



οὕτως ἀφαιρεθὲν τὸ ὑπὸ ΠΜΘ πρὸς ἀφαιρεθὲν το ὑπὸ ΛΟΣ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΣΤΛ, καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ὑπὸ ΡΞΜ πρὸς λοιπὸν τὸ ὑπὸ ΤΞΚ ἐστιν, ως τὸ ἀπὸ ΔΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΕ. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΞΝ τοῦ ὑπὸ ΤΞΚ μεῖζόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ὑπὸ ΤΞΚ· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ ΟΤΝ ἴσον ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΑΕ. ἔστι δέ.

κς'.

Ἐὰν δὲ ἡ κατὰ τὸ Ξ σύμπτωσις τῶν παραλλήλων ἐντὸς ᾖ μιᾶς τῶν Α, Γ τομῶν, ὡς ὑπόκειται, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν τμημάτων τῆς παραλλήλου τῇ πλαγίᾳ, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΔΞΖ, τοῦ πρὸς ὃ λόγον ἔχει τὸ ὑπὸ τῆς ἑτέρας τῶν τμημάτων, τουτέστι τὸ ὑπὸ ΡΞΗ, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας, ἔλασσον ἔσται τῷ δὶς ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς πλαγίας τετραγώνῳ.

ἐπεὶ γὰρ διὰ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερόν ἐστιν, ὡς τὸ

6. ὑπό] bis V; corr. pc. 7. τό] τῷ V; corr. p. ΛΟΣ] c, corr. ex ΛΟ, ΟΣ m. 1 V. 14. ΣΤΛ] ΝΣΟ V; corr. Halley.

spatio, ad quod rectangulum comprehensum partibus rectae diametro rectae parallelae, hoc est $P\Xi \times \Xi M$, rationem habet, quam quadratum diametri rectae ad quadratum transuersae, maius erit duplo quadrato dimidiae diametri transuersae.

eadem enim de causa est

$$\varDelta E^2 : EA^2 = \Pi\Xi \times \Xi\Theta : \Sigma\Xi \times \Xi\varLambda.$$

est autem [II, 11] $\varDelta E^2 = \Pi M \times M\Theta$, $AE^2 = \varLambda O \times O\Sigma$. quare etiam $\varDelta E^2 : AE^2 = \Pi M \times M\Theta : \varLambda O \times O\Sigma$. et quoniam est

$$\Pi\Xi \times \Theta\Xi : \varLambda\Xi \times \Xi\Sigma = \Pi M \times M\Theta : \varLambda O \times O\Sigma$$
$$= \Pi M \times M\Theta : \Sigma T \times T\varLambda \text{ [II, 22]},$$

erit etiam reliquum [II, 16; Pappi lemma IV]

$$P\Xi \times \Xi M : T\Xi \times \Xi K \text{ [u. Pappi lemma V, 2 et II, 8]}$$
$$= \varDelta E^2 : AE^2 \text{ [Eucl. V, 19].}$$

demonstrandum igitur, esse

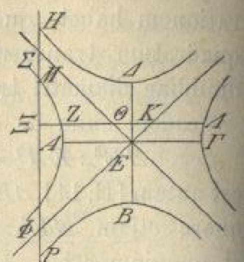
$$O\Xi \times \Xi N = T\Xi \times \Xi K + 2\,AE^2.$$

auferatur, quod commune est, $T\Xi \times \Xi K$; reliquum igitur est, ut demonstremus, esse $OT \times TN = 2\,AE^2$ [II, 8, 16 et Pappi lemma V, 2]. et est [II, 23].

XXVI.

Sin punctum concursus parallelarum Ξ intra alterutram sectionum A, Γ positum est, sicut infra descriptum est, rectangulum comprehensum partibus rectae diametro transuersae parallelae, hoc est $\varDelta\Xi \times \Xi Z$, spatio, ad quod rectangulum comprehensum partibus alterius, hoc est $P\Xi \times \Xi H$, rationem habet, quam quadratum diametri rectae ad quadratum transuersae, minus erit duplo quadrato dimidiae diametri transuersae.

nam quoniam eadem de causa, qua antea, est ἀπὸ $\varDelta E$ πρὸς τὸ ἀπο $E\varLambda$, τὸ ὑπὸ $\Phi\Xi\Sigma$ πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Xi\Theta$, καὶ ὅλον ἄρα τὸ ὑπὸ $P\Xi H$ λόγον ἔχει τὸν τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Xi\Theta$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\varLambda E$. δεικτέον ἄρα, ὅτι τὸ ὑπὸ $\varLambda\Xi Z$ τοῦ ὑπὸ $K\Xi\Theta$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\varLambda E$ ἔλασσόν ἐστι τῷ δὶς ἀπὸ $\varLambda E$.



κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ἀπὸ $\varLambda E$· λοιπὸν ἄρα δεικτέον, ὅτι τὸ ὑπὸ $\varLambda\Xi Z$ τοῦ ὑπὸ $K\Xi\Theta$ ἔλασσόν ἐστι τῷ ἀπὸ $\varLambda E$, τουτέστι τῷ ὑπὸ $\varLambda\Theta Z$. ἔστι δέ· τὸ γὰρ ὑπὸ $\varLambda\Theta Z$ μετὰ τοῦ ὑπὸ $\varLambda\Xi Z$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $K\Xi\Theta$.

κζ'.

Ἐὰν ἐλλείψεως ἢ κύκλου περιφερείας συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, καὶ παρ' αὐτὰς ἀχθῶσι δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ τῇ γραμμῇ, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῆς γραμμῆς ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα εἴδη τῷ ὑποκειμένῳ εἴδει πρὸς τῇ ὀρθίᾳ διαμέτρῳ ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς πλαγίας διαμέτρου τετραγώνῳ.

ἔστω γὰρ ἔλλειψις ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $\varLambda B\Gamma\varDelta$, ἧς κέντρον τὸ E, καὶ ἤχθωσαν αὐτῆς δύο συζυγεῖς

3. τοῦ ἀπό] ἀπὸ τοῦ V; corr. p. 6. $\varLambda\Xi Z$] c, corr. ex $\varLambda\Xi\Theta$ m. 1 V. 11. τῷ] pc, mutat. in τοῦ m. 1 V; τοῦ v. 25. διαμέτρῳ] μέτρῳ V; corr. p.

$\varDelta E^2 : E\varLambda^2 = \Phi\Xi \times \Xi\Sigma : K\Xi \times \Xi\Theta$, erit etiam totum [u. Pappi lemma V, 2, coll. II, 11, 16]

$P\Xi \times \Xi H : K\Xi \times \Xi\Theta + \varLambda E^2 = \varDelta E^2 : E\varLambda^2$ [Eucl. V, 12].

demonstrandum igitur, esse

$$\varLambda\Xi \times \Xi Z + 2\,\varLambda E^2 = K\Xi \times \Xi\Theta + \varLambda E^2.$$

auferatur, quod commune est, $\varLambda E^2$; itaque reliquum est, ut demonstremus, esse

$$\varLambda\Xi \times \Xi Z + \varLambda E^2 = K\Xi \times \Xi\Theta,$$

hoc est [II, 11, 16] $\varLambda\Xi \times \Xi Z = K\Xi \times \Xi\Theta \div \varLambda\Theta \times \Theta Z$. et est; nam $\varLambda\Theta \times \Theta Z + \varLambda\Xi \times \Xi Z = K\Xi \times \Xi\Theta$ [u. Pappi lemma IV, coll. II, 16].

XXVII.

Si ellipsis uel ambitus circuli diametri coniugatae ducuntur, et altera earum diametrus recta sumitur, altera transuersa, iisque parallelae duae rectae ducuntur inter se et cum linea concurrentes, quadrata rectarum in recta diametro transuersae parallela ducta inter punctum concursus rectarum lineamque abscisarum adsumptis figuris descriptis in rectis in recta diametro rectae parallela ducta inter punctum concursus rectarum lineamque abscisis, quae figurae similes similiterque descriptae sunt figurae ad diametrum rectam suppositae, aequalia erunt quadrato diametri transuersae.

sit enim ellipsis uel ambitus circuli $\varLambda B\Gamma\varDelta$, cuius centrum sit E, et ducantur duae eius diametri coniugatae, recta $\varLambda E\Gamma$, transuersa autem $BE\varDelta$, rectisque $\varLambda\Gamma$, $B\varDelta$ parallelae ducantur $NZH\Theta$, $KZ\varLambda M$. dico, $NZ^2 + Z\Theta^2$ adsumptis figuris in KZ, ZM similibus διάμετροι, ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρὰ τὰς ΑΓ, ΒΔ ἤχθωσαν αἱ ΝΖΗΘ, ΚΖΛΜ. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΝΖ, ΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ τῶν ΚΖ, ΖΜ εἴδη ὅμοια καὶ ὁμοίως ἀναγεγραμμένα τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἔσται τῷ ἀπὸ τῆς ΒΔ τετραγώνῳ.

ἤχθω ἀπὸ τοῦ Ν παρὰ τὴν ΑΕ ἡ ΝΞ· τεταγμένως ἄρα κατῆκται ἐπὶ τὴν ΒΔ. καὶ ἔστω ὀρθία ἡ ΒΠ. ἐπεὶ οὖν ἐστιν, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΑΓ, ἡ ΑΓ πρὸς ΒΔ, καὶ ὡς ἄρα ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ. τὸ δὲ ἀπὸ ΒΔ ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΒΠ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΑΓ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ εἶδος, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΝΞ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΞΔ· ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ἀπὸ ΝΞ εἶδος, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΖΛ, ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει, τῷ ὑπὸ ΒΞΔ. ὁμοίως δὴ δείξομεν, ὅτι τὸ ἀπὸ ΚΛ εἶδος ὅμοιον τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΒΛΔ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΝΘ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Η, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ζ, τὰ ἀπὸ τῶν ΘΖ, ΖΝ τετράγωνα διπλάσιά εἰσι τῶν ἀπὸ ΘΗ, ΗΖ, τουτέστι τῶν ἀπὸ ΝΗ, ΗΖ. διὰ τὰ αὐτὰ δὴ καὶ τὰ ἀπὸ ΜΖ, ΖΚ τετράγωνα διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΛΖ τετραγώνων, καὶ τὰ ἀπὸ

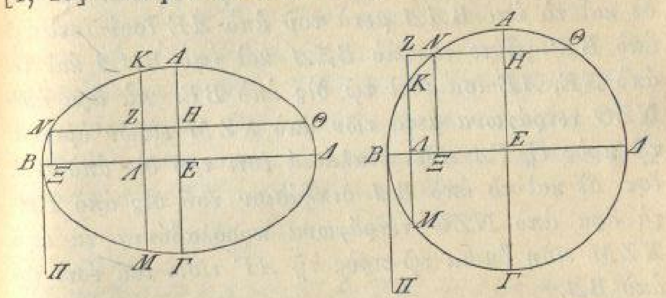
3. ΝΖ] p, corr. ex ΝΞ m. 1 V. 13. τό] (pr.) om. V; corr. p. 17. ΝΞ] (alt.) pc, corr. ex ΝΖ m. 1 V. 26. τῶν] (pr.) pc, corr. ex τῷ m. 1 V.

similiterque descriptis figurae ad $A\Gamma$ adplicatae esse $= B\varDelta^2$.

ducatur ab N rectae AE parallela $N\Xi$; ea igitur ad $B\varDelta$ ordinate ducta est [I def. 6]. et latus rectum sit $B\Pi$. iam quoniam est [I def. alt. 3]

$$B\Pi : A\Gamma = A\Gamma : B\varDelta,$$

erit etiam $B\Pi : B\varDelta = A\Gamma^2 : B\varDelta^2$ [Eucl. V def. 9]. uerum $B\varDelta^2$ figurae ad $A\Gamma$ adplicatae aequale est [I, 15]. itaque ut $B\Pi : B\varDelta$, ita $A\Gamma^2$ ad figuram



ad $A\Gamma$ adplicatam. uerum ut $A\Gamma^2$ ad figuram ad $A\Gamma$ adplicatam, ita $N\Xi^2$ ad figuram ad $N\Xi$ adplicatam figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similem [Eucl. VI, 22]. quare etiam, ut $\Pi B : B\varDelta$, ita $N\Xi^2$ ad figuram ad $N\Xi$ adplicatam figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similem. uerum etiam [I, 21] $\Pi B : B\varDelta = N\Xi^2 : B\Xi \times \Xi\varDelta$. itaque [Eucl. V, 9] figura ad $N\Xi$, hoc est [Eucl. I, 34] ad $Z\varLambda$, adplicata figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similis aequalis est rectangulo $B\Xi \times \Xi\varDelta$. iam similiter demonstrabimus, figuram ad $K\varLambda$ adplicatam figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similem aequalem esse rectangulo $B\varLambda \times \varLambda\varDelta$. et quoniam recta $N\Theta$ in H in partes aequales [I def. 6], in Z autem in inaequales secta est, ΜΖΚ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ἀπὸ ΚΑΖ ὁμοίων εἰδῶν. ἴσα δέ ἐστι τὰ μὲν ἀπὸ ΚΑΖ εἴδη τοῖς ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΑΔ, τὰ δὲ ἀπὸ ΝΗΖ τετράγωνα τοῖς ἀπὸ ΞΕΑ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετα τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει διπλάσιά ἐστι τῶν ὑπὸ ΒΞΔ, ΒΑΔ καὶ τῶν ἀπὸ ΞΕΑ. καὶ ἐπεὶ εὐθεῖα ἡ ΒΔ τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Ε, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Ξ, τὸ ὑπὸ ΒΞΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΞΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ. ὁμοίως δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΒΑΔ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΕ· ὥστε τὰ ὑπὸ ΒΞΔ καὶ ὑπὸ ΒΑΔ καὶ τὰ ἀπὸ ΞΕ, ΑΕ ἴσα ἐστὶ τῷ δὶς ἀπὸ ΒΕ. τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα μετὰ τῶν ἀπὸ ΚΖΜ εἰδῶν ὁμοίων τῷ πρὸς τῇ ΓΑ εἴδει διπλάσιά ἐστι τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ἀπὸ ΒΔ διπλάσιον τοῦ δὶς ἀπὸ ΒΕ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΝΖΘ τετράγωνα προσλαβόντα τὰ ἀπὸ ΚΖΜ εἴδη ὅμοια τῷ πρὸς τῇ ΑΓ εἴδει ἴσα ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΒΔ.

κη'.

Ἐὰν ἐν ταῖς κατὰ συζυγίαν ἀντικειμέναις συζυγεῖς διάμετροι ἀχθῶσι, καὶ λέγηται αὐτῶν ἡ μὲν ὀρθία, ἡ δὲ πλαγία, ἀχθῶσι δὲ παρ' αὐτὰς δύο εὐθεῖαι συμπίπτουσαι ἀλλήλαις καὶ ταῖς τομαῖς, τα ἀπὸ τῶν λαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν

9. μετά] pc, μ e corr. m. 1 V. 10. δέ] δή Halley. 23. ἀπολαμβανομένων Halley. 26. τά] τό V; corr. p. 27. ἠγμένης] τῆς ἠγμένης V; corr. p.

erit [Eucl. II, 9]

$$\Theta Z^2 + ZN^2 = 2(\Theta H^2 + HZ^2) = 2(NH^2 + HZ^2).$$

eadem de causa erit etiam

$$MZ^2 + ZK^2 = 2(KA^2 + AZ^2),$$

et figurae in MZ, ZK descriptae figurae in $A\Gamma$ descriptae similes duplo maiores sunt figuris in KA, AZ similibus descriptis [Eucl. VI, 22]. uerum figurae in KA, AZ descriptae rectangulis $B\Xi \times \Xi\Delta$, $BA \times A\Delta$ aequales sunt, et $NH^2 + HZ^2 = \Xi E^2 + EA^2$ [Eucl. I, 34]; itaque $NZ^2 + Z\Theta^2$ cum figuris in KZ, ZM figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similibus descriptis duplo maiora sunt quam $B\Xi \times \Xi\Delta + BA \times A\Delta + \Xi E^2 + EA^2$. et quoniam recta $B\Delta$ in E in partes aequales, in Ξ autem in partes inaequales secta est, erit [Eucl. II, 5] $B\Xi \times \Xi\Delta + \Xi E^2 = BE^2$. et eodem modo

$$BA \times A\Delta + AE^2 = BE^2.$$

quare erit

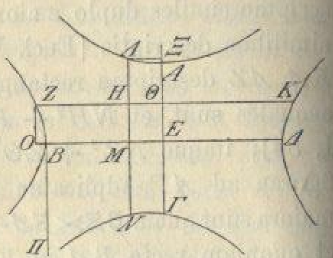
$$B\Xi \times \Xi\Delta + BA \times A\Delta + \Xi E^2 + AE^2 = 2\,BE^2.$$

itaque $NZ^2 + Z\Theta^2$ cum figuris in KZ, ZM figurae ad ΓA adplicatae similibus descriptis aequalia sunt $4\,BE^2$. uerum etiam $B\Delta^2 = 4\,BE^2$. itaque $NZ^2 + Z\Theta^2$ adsumptis figuris in KZ, ZM figurae ad $A\Gamma$ adplicatae similibus descriptis quadrato $B\Delta^2$ aequalia sunt.

XXVIII.

Si in oppositis coniugatis diametri coniugatae ducuntur, et altera earum diametrus recta sumitur, altera transuersa, iisque parallelae duae rectae ducuntur inter se et cum sectionibus concurrentes, quadrata rectarum in recta diametro rectae parallela ducta inter punctum concursus rectarum sectionesque sumptarum ad qua-τετράγωνα λόγον ἔχουσιν, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.

ἔστωσαν κατὰ συζυγίαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, Γ, Δ, διάμετροι δὲ αὐτῶν ὀρθία μὲν ἡ ΑΕΓ, πλαγία δὲ ἡ ΒΕΔ, καὶ παρ' αὐτας ἤχθωσαν αἱ ΖΗΘΚ, ΛΗΜΝ τέμνουσαι ἀλλήλας καὶ τὰς τομάς. λέγω, ὅτι τὰ ἀπὸ τῶν ΛΗΝ τετράγωνα πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.



ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Ζ, Λ τεταγμένως αἱ ΛΞ, ΖΟ· παράλληλοι ἄρα εἰσὶ ταῖς ΑΓ, ΒΔ. ἀπὸ δὲ τοῦ Β ἤχθω ἡ ὀρθία τῆς ΒΔ ἡ ΒΠ· φανερὸν δή, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΠΒ πρὸς ΒΔ, τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τὸ ἀπὸ ΑΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΒ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΟ πρὸς τὸ ὑπὸ ΒΟΔ καὶ τὸ ὑπὸ ΓΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΛΞ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἓν τῶν ἡγουμένων πρὸς ἓν τῶν ἑπομένων, οὕτως ἅπαντα τὰ ἡγούμενα πρὸς ἅπαντα τὰ ἑπόμενα· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὸ ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΟΖ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΕΘ, πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ καὶ τοῦ ἀπὸ ΛΞ, τουτέστι τοῦ ἀπὸ ΜΕ. ἀλλὰ τὸ μὲν ὑπὸ ΓΞΑ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΑΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΞΕ, τὸ δὲ ὑπὸ ΔΟΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΒΕ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΟΕ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΞΕΘ πρὸς τὰ ἀπὸ ΟΕΜ, τουτέστι τὰ ἀπὸ ΛΜΗ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΘΗ. καί ἐστι τῶν μὲν

5. ΒΕΔ] ΑΕΔ V; corr. p. ΛΗΜΝ] ΗΛΜΝ V; corr. p. 14. ΑΓ, ΒΔ] ΑΒ, ΓΔ V; corr. p. 19. ΛΞ] p;

drata rectarum in recta diametro transuersae parallela ducta inter punctum concursus rectarum sectionesque abscisarum eam rationem habent, quam quadratum diametri rectae ad quadratum diametri transuersae.

sint oppositae coniugatae A, B, Γ, Δ, diametri autem earum recta $AE\Gamma$, transuersa $BE\Delta$, iisque parallelae ducantur $ZH\Theta K$, ΛHMN inter se sectionesque secantes. dico, esse

$$\Lambda H^2 + HN^2 : ZH^2 + HK^2 = A\Gamma^2 : B\Delta^2.$$

ducantur enim a Z, Λ ordinate $\Lambda\Xi$, ZO; eae igitur rectis $A\Gamma$, $B\Delta$ parallelae erunt [I def. 6]. a B autem latus rectum transuersi lateris $B\Delta$ ducatur $B\Pi$. manifestum igitur, esse

$\Pi B : B\Delta = A\Gamma^2 : B\Delta^2$ [I def. alt. 3; Eucl. V def. 9] $= AE^2 : EB^2$ [Eucl. V, 15] $= ZO^2 : BO \times O\Delta$ [I, 21]
$= \Gamma\Xi \times \Xi A : \Lambda\Xi^2$ [I, 56].

itaque, ut unum praecedentium ad unum sequentium, ita omnia praecedentia ad omnia sequentia [Eucl. V, 12]; quare erit

$$A\Gamma^2 : B\Delta^2$$
$$= \Gamma\Xi \times \Xi A + AE^2 + OZ^2 : \Delta O \times OB + BE^2 + \Lambda\Xi^2$$
$$= \Gamma\Xi \times \Xi A + AE^2 + E\Theta^2 : \Delta O \times OB + BE^2 + ME^2$$

[Eucl. I, 34]. est autem

$\Gamma\Xi \times \Xi A + AE^2 = \Xi E^2$, $\Delta O \times OB + BE^2 = OE^2$

[Eucl. II, 6]; itaque

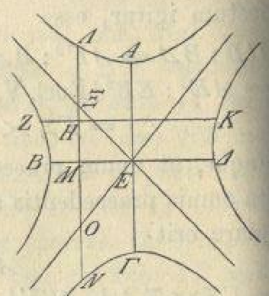
$$A\Gamma^2 : B\Delta^2 = \Xi E^2 + E\Theta^2 : OE^2 + EM^2$$
$$= \Lambda M^2 + MH^2 : Z\Theta^2 + \Theta H^2 \text{ [Eucl. I, 34].}$$

ΛΞ c et corr. m. 1 ex ΛΖ V. 23. τοῦ] pv; euan. V. 29. ΖΘΗ] ΖΗΘ V; corr. Memus.

ἀπὸ ΛΜΗ διπλάσια τὰ ἀπὸ ΝΗΛ, ὡς δέδεικται, τῶν δὲ ἀπὸ ΖΘΗ τὰ ἀπὸ ΖΗΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ, τὰ ἀπὸ ΛΗΝ πρὸς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ.

κθ'.

Τῶν αὐτῶν ὑποκειμένων ἐὰν ἡ τῇ ὀρθίᾳ παράλληλος τέμνῃ τὰς ἀσυμπτώτους, τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων εὐθειῶν ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ τὴν ὀρθίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν ἀσυμπτώτων προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετραγώνου πρὸς τὰ ἀπὸ τῶν ἀπολαμβανομένων ἐπ' εὐθείας τῆς παρὰ την πλαγίαν ἠγμένης μεταξὺ τῆς συμπτώσεως τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν τομῶν τετράγωνα λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ τῆς ὀρθίας τετράγωνον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς πλαγίας τετράγωνον.



ἔστω γὰρ τὰ αὐτα τῷ πρότερον, ἡ δὲ ΝΛ τεμνέτω τὰς ἀσυμπτώτους κατὰ τὰ Ξ, Ο. δεικτέον, ὅτι τὰ ἀπὸ ΞΗΟ προσλαβόντα τὸ ἥμισυ τοῦ ἀπὸ ΑΓ, τουτέστι τὸ δὶς ἀπὸ ΕΑ [τουτέστι τὸ δὶς ὑπο ΟΛΞ], πρὸς τα ἀπὸ ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ προς το ἀπὸ ΒΔ.

ἐπεὶ γὰρ ἴση ἐστὶν ἡ ΛΞ τῇ ΟΝ, τα ἄπο τῶν ΛΗΝ τῶν ἀπὸ ΞΗΟ ὑπερέχει τῷ δὶς ὑπὸ ΝΞΛ· τὰ ἄρα ἀπὸ ΞΗΟ μετὰ τοῦ δὶς ἀπὸ ΑΕ ἴσα ἐστὶ τοῖς ἀπὸ ΛΗΝ. τὰ δὲ ἀπὸ ΛΗΝ προς τὰ ἀπὸ ΖΗΚ

2. ΖΘΗ] ΖΗΘ V; corr. Comm. 8. Post συμπτώσεως del. compendium *καί* m. 1 V; non habet v; hab. pc. 19. ΝΛ] ΜΛ V; corr. p (ΛΝ). 20. τά] τό V; corr. p. 21. ΞΗΟ] ΞΝΟ V; corr. Memus. 23. τουτέστι — ΟΛΞ] deleo. 26. τῷ] τό V; corr. p.

est autem, ut demonstrauimus [prop. XXVII ex Eucl. II, 9]

$$NH^2 + H\Lambda^2 = 2(\Lambda M^2 + MH^2),$$
$$ZH^2 + HK^2 = 2(Z\Theta^2 + \Theta H^2).$$

ergo etiam

$$A\Gamma^2 : B\Delta^2 = \Lambda H^2 + HN^2 : ZH^2 + HK^2.$$

XXIX.

Iisdem suppositis si recta diametro rectae parallela asymptotas secat, quadrata rectarum in recta diametro rectae parallela ducta inter punctum concursus rectarum asymptotasque abscisarum adsumpto dimidio quadrato diametri rectae ad quadrata rectarum in recta diametro transuersae parallela ducta inter punctum concursus rectarum sectionesque abscisarum rationem habent, quam quadratum diametri rectae ad quadratum diametri transuersae.

sint enim eadem, quae in propositione praecedenti, $N\Lambda$ autem asymptotas secet in Ξ, O. demonstrandum, esse

$$\Xi H^2 + HO^2 + \tfrac{1}{2}A\Gamma^2 : ZH^2 + HK^2 = A\Gamma^2 : B\Delta^2$$
$$= \Xi H^2 + HO^2 + 2E A^2 : ZH^2 + HK^2.$$

nam quoniam est $\Lambda\Xi = ON$ [II, 16], erit [u. Pappi lemma VII et Eutocius]

$$\Lambda H^2 + HN^2 = \Xi H^2 + HO^2 + 2N\Xi \times \Xi\Lambda$$
$$= \Xi H^2 + HO^2 + 2AE^2 \text{ [II, 11, 16]}.$$

λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπο ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ· καὶ τὰ ἀπὸ ΞΗΟ ἄρα μετα τοῦ δὶς ἀπὸ ΕΑ πρὸς τα ἀπο ΖΗΚ λόγον ἔχει, ὃν τὸ ἀπὸ ΑΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ.

λ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ την τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ ΑΒΓ, καὶ ἐφαπτόμεναι μὲν αἱ ΑΔΓ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΕΖΗ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΓ, καὶ διὰ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΔΚΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

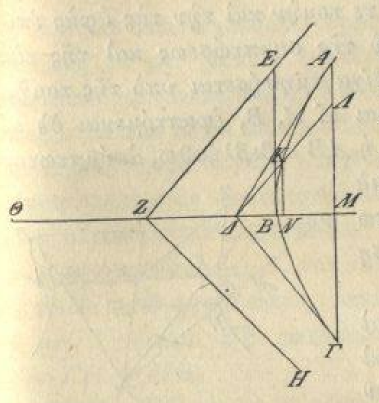
ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ ΖΔΒΜ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, καὶ κείσθω τῇ ΒΖ ἴση ἡ ΖΘ, καὶ διὰ τῶν Β, Κ σημείων παρὰ τὴν ΑΓ ἤχθωσαν αἱ ΒΕ, ΚΝ· τεταγμένως ἄρα κατηγμέναι εἰσί. καὶ ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι το ΒΕΖ τρίγωνον τῷ ΔΝΚ, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΒΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΕ, οὕτως ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν. ἀλλ' ὡς ἡ ΘΒ πρὸς τὴν ὀρθίαν, οὕτως τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ, τὸ ὑπὸ ΘΝΒ πρὸς τὸ ἀπὸ ΝΚ. ἴσον ἄρα ἐστὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ τῷ ἀπὸ ΔΝ. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἴσον τῷ ἀπὸ

3. ἀπὸ] (alt.) om. V; corr. p. 13. ΖΕ] ΖΗ V; corr. Comm. (ef). 23. ἀλλ' — 24. ὀρθίαν] om. V; corr. Memus.

uerum $\Delta H^2 + HN^2 : ZH^2 + HK^2 = A\Gamma^2 : B\Delta^2$ [prop. XXVIII]; quare etiam
$$\Xi H^2 + HO^2 + 2EA^2 : ZH^2 + HK^2 = A\Gamma^2 : B\Delta^2.$$

XXX.

Si duae rectae hyperbolam contingentes concurrunt, et per puncta contactus recta ducitur, per punctum concursus autem recta alterutri asymptotarum parallela ducitur secans et sectionem et rectam puncta contactus coniungentem, recta inter punctum concursus rectamque puncta contactus coniungentem posita a sectione in duas partes aequales secabitur.



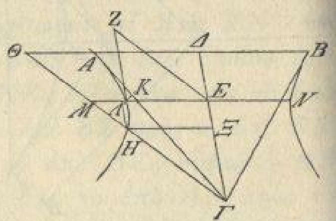
sit hyperbola $AB\Gamma$ et contingentes $A\Delta$, $\Delta\Gamma$, asymptotae autem EZ, ZH, ducaturque $A\Gamma$, et per Δ rectae ZE parallela ducatur $\Delta K\Lambda$. dico, esse
$$\Delta K = K\Lambda.$$
ducatur enim $Z\Delta BM$ et in utramque partem producatur, ponaturque $Z\Theta = BZ$, per puncta B, K autem rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur BE, KN; eae igitur ordinate ductae sunt [I def. 4]. et quoniam trianguli BEZ, ΔNK similes sunt [Eucl. I, 29], erit
$$\Delta N^2 : NK^2 = BZ^2 : BE^2 \text{ [Eucl. VI, 4].}$$
uerum ut $BZ^2 : BE^2$, ita ΘB ad latus rectum [II, 1]; itaque etiam, ut $\Delta N^2 : NK^2$, ita ΘB ad latus rectum. est autem, ut ΘB ad latus rectum, ita $\Theta N \times NB : NK^2$

ΖΒ, διότι ἡ μὲν ΑΔ ἐφάπτεται, ἡ δὲ ΑΜ κατῆκται· ὥστε καὶ τὸ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπο ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΜΖΔ μετὰ τοῦ ἀπο ΔΝ. τὸ δὲ ὑπὸ ΘΝΒ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ΖΝ· καὶ τὸ ὑπὸ ΜΖΔ ἄρα μετὰ τοῦ ἀπὸ ΔΝ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΖΝ. ἡ ἄρα ΔΜ δίχα τέτμηται κατὰ τὸ Ν προσκειμένην ἔχουσα τὴν ΔΖ. καὶ παράλληλοί εἰσιν αἱ ΚΝ, ΛΜ· ἴση ἄρα ἡ ΔΚ τῇ ΚΛ.

λα'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν ἀσύμπτωτον τέμνουσα τήν τε τομὴν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἡ μεταξὺ τῆς συμπτώσεως καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΓΒ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΑΒ ἐκβεβλήσθω, ἀσύμπτωτος δὲ ἔστω ἡ ΖΕ, καὶ διὰ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΕ ἤχθω ἡ ΓΗΘ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓΗ τῇ ΗΘ.



ἐπεζεύχθω ἡ ΓΕ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ διὰ τῶν Ε, Η παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθωσαν ἡ ΝΕΚΜ καὶ η ΗΞ, διὰ δὲ τῶν Η, Κ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΚΖ, ΗΛ.

ἐπεὶ ὅμοιόν ἐστι τὸ ΚΖΕ τῷ ΜΛΗ, ἔστιν, ὡς το ἀπὸ ΚΕ πρὸς το ἀπὸ ΚΖ, το ἀπο ΜΛ προς το ἀπὸ

17. ΑΓΒ] ΑΓ V; corr. p (ΑΓ, ΒΓ). 19. Γ] ΓΔ V; corr. p. 25. ΝΕΚΜ] $\overline{ΕΚ}$ $\overline{ΜΝ}$ V; corr. Halley. 28. τό] (tert.) om. V (in fine lineae); corr. p.

[I, 21]; quare etiam $\Delta N^2 : NK^2 = \Theta N \times NB : NK^2$. quare $\Theta N \times NB = \Delta N^2$ [Eucl. V, 9]. est autem etiam $MZ \times Z\Delta = ZB^2$ [I, 37], quia $A\Delta$ contingit, AM autem ordinate ducta est. itaque etiam

$$\Theta N \times NB + ZB^2 = MZ \times Z\Delta + \Delta N^2.$$

uerum $\Theta N \times NB + ZB^2 = ZN^2$ [Eucl. II, 6]; quare etiam $MZ \times Z\Delta + \Delta N^2 = ZN^2$; itaque ΔM in N in duas partes aequales secta est adiectam habens ΔZ [Eucl. II, 6]. et KN, ΛM parallelae sunt; ergo [Eucl. VI, 2] $\Delta K = K\Lambda$.

XXXI.

Si duae rectae sectiones oppositas contingentes concurrunt, et per puncta contactus recta ducitur, per punctum concursus autem recta asymptotae parallela ducitur secans et sectionem et rectam puncta contactus coniungentem, recta inter punctum concursus rectamque puncta contactus coniungentem posita a sectione in duas partes aequales secabitur.

sint oppositae A, B, contingentes autem $A\Gamma$, ΓB, et ducta AB producatur, asymptota autem sit ZE, et per Γ rectae ZE parallela ducatur $\Gamma H\Theta$. dico, esse $\Gamma H = H\Theta$.

ducatur ΓE et ad Δ producatur, per E, H autem rectae AB parallelae ducantur $NEKM$, $H\Xi$ et per H, K rectae $\Gamma\Delta$ parallelae KZ, $H\Lambda$.

quoniam KZE, $M\Lambda H$ similes sunt [Eucl. I, 29], erit $KE^2 : KZ^2 = M\Lambda^2 : \Lambda H^2$ [Eucl. VI, 4]. demonstrauimus autem [prop. XXX ex II, 1 et I, 21], esse $EK^2 : KZ^2 = N\Lambda \times \Lambda K : \Lambda H^2$. itaque [Eucl. V, 9] $N\Lambda \times \Lambda K = M\Lambda^2$. commune adiiciatur KE^2; itaque

ΔH. ὡς δὲ το ἀπὸ EK πρὸς τὸ ἀπο KZ, δέδεικται τὸ ὑπὸ $N\Delta K$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔH· ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ $N\Delta K$ τῷ ἀπὸ $M\Delta$. κοινὸν προσκείσθω τὸ ἀπο KE· τὸ ἄρα ὑπὸ $N\Delta K$ μετὰ τοῦ ἀπὸ KE, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΔE, τουτέστι τὸ ἀπὸ $H\Xi$, ἴσον ἐστὶ τοῖς ἀπὸ $M\Delta$, KE. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $H\Xi$ πρὸς τὰ ἀπὸ $M\Delta$, KE, οὕτως τὸ ἀπὸ $\Xi\Gamma$ πρὸς τὰ ἀπὸ ΔH, KZ· ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ $\Xi\Gamma$ τοῖς ἀπὸ $H\Delta$, KZ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ ΔH τῷ ἀπὸ ΞE, τὸ δὲ ἀπὸ KZ τῷ ἀπὸ τῆς ἡμισείας τῆς δευτέρας διαμέτρου, τουτέστι τῷ ὑπο $\Gamma E\Delta$· το ἄρα ἀπὸ $\Gamma\Xi$ ἴσον ἐστὶ τῷ τε ἀπὸ ΞE καὶ τῷ ὑπὸ $\Gamma E\Delta$. ἡ ἄρα $\Gamma\Delta$ δίχα μὲν τέτμηται κατὰ τὸ Ξ, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ το E. καὶ παράλληλος ἡ $\Delta\Theta$ τῇ $H\Xi$· ἴση ἄρα ἡ ΓH τῇ $H\Theta$.

λβ΄.

Ἐὰν ὑπερβολῆς δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἀφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ἀπολαμβανομένη δίχα τμηθήσεται ὑπὸ τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ $AB\Gamma$, ἧς κέντρον τὸ Δ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ ΔE, καὶ ἐφαπτέσθωσαν αἱ AZ, $Z\Gamma$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΓA καὶ ἡ $Z\Delta$ καὶ ἐκβεβλήσθω ἐπὶ τὰ H, Θ· φανερὸν δή, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $A\Theta$ τῇ $\Theta\Gamma$. ἤχθω δὴ διὰ μὲν τοῦ Z παρὰ τὴν $A\Gamma$ ἡ ZK, διὰ δὲ τοῦ Θ

6. $H\Xi$] p, corr. ex $H\Gamma$ m. 1 V; $H\Gamma\Xi$ cv. τά] τό V; corr. p. 7. τά] τό V; corr. p. 26. $Z\Delta$] $\Xi\Delta$ vc et V?; corr. p.

$$N\Delta \times \Delta K + KE^2 = M\Delta^2 + KE^2 = \Delta E^2 \text{ [Eucl. II, 6]} = H\Xi^2 \text{ [Eucl. I, 34]}.$$

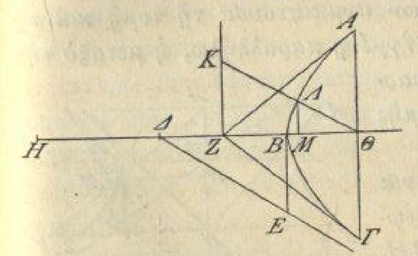
est autem $H\Xi^2 : M\Delta^2 + KE^2 = \Xi\Gamma^2 : \Delta H^2 + KZ^2$ [Eucl. VI, 4; V, 12]; itaque $\Xi\Gamma^2 = H\Delta^2 + KZ^2$. est autem $\Delta H^2 = \Xi E^2$ [Eucl. I, 34] et KZ^2 quadrato dimidiae secundae diametri aequale [II, 1], hoc est $KZ^2 = \Gamma E \times E\Delta$ [I, 38]; itaque

$$\Gamma\Xi^2 = \Xi E^2 + \Gamma E \times E\Delta.$$

$\Gamma\Delta$ igitur in Ξ in duas partes aequales, in E autem in inaequales secta est [Eucl. II, 5]. et $\Delta\Theta$, $H\Xi$ parallelae sunt; ergo $\Gamma H = H\Theta$ [Eucl. VI, 2].

XXXII.

Si duae rectae hyperbolam contingentes concurrunt, et per puncta contactus recta ducitur, per punctum autem concursus contingentium recta rectae puncta contactus coniungenti parallela ducitur, et per punctum medium rectae puncta contactus coniungentis recta alterutri asymptotarum parallela ducitur, recta inter punctum medium parallelamque abscisa a sectione in duas partes aequales secabitur.

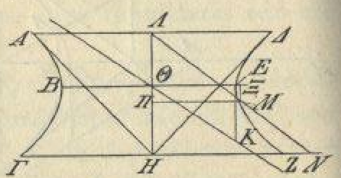


sit hyperbola $AB\Gamma$, cuius centrum sit Δ, asymptota autem ΔE, et contingant AZ, $Z\Gamma$, ducaturque ΓA et $Z\Delta$, quae ad H, Θ producatur; manifestum igitur, esse $A\Theta = \Theta\Gamma$ [II, 30]. iam per Z rectae $A\Gamma$ parπαρὰ τὴν $\varDelta E$ ἡ $\Theta \varLambda K$. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ $K\varLambda$ τῇ $\Theta\varLambda$.

ἤχθωσαν διὰ τῶν B, $\varLambda$ παρὰ την $A\Gamma$ αἱ $\varLambda M$, BE· ἔσται δή, ὡς προδέδεικται, ὡς τὸ ἀπὸ $\varDelta B$ πρὸς τὸ ἀπὸ BE, τό τε ἀπὸ ΘM πρὸς τὸ ἀπὸ $M\varLambda$ καὶ τὸ ὑπο BMH πρὸς τὸ ἀπὸ $M\varLambda$· ἴσον ἄρα το ὑπὸ HMB τῷ ἀπὸ $M\Theta$. ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ $\Theta\varDelta Z$ ἴσον τῷ ἀπὸ $\varDelta B$, διότι ἐφάπτεται ἡ $\varDelta Z$, καὶ κατῆκται ἡ $\varLambda\Theta$· τὸ ἄρα ὑπὸ HMB μετὰ τοῦ ἀπὸ $\varDelta B$, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ $\varLambda M$, ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $\Theta\varDelta Z$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $M\Theta$. δίχα ἄρα τέτμηται ἡ $Z\Theta$ κατὰ τὸ M προσκειμένην ἔχουσα τὴν $\varDelta Z$. καί εἰσι παράλληλοι αἱ KZ, $\varLambda M$· ἴση ἄρα ἡ $K\varLambda$ τῇ $\varLambda\Theta$.

λγ'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῶν ἀφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, διὰ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ την τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, διὰ δὲ τῆς διχοτομίας τῆς τὰς ἁφας ἐπιζευγνυούσης ἀχθῇ εὐθεῖα παρά τινα τῶν ἀσυμπτώτων συμπίπτουσα τῇ τομῇ καὶ τῇ διὰ τῆς συμπτώσεως ἠγμένῃ παραλλήλῳ, ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς παραλλήλου ὑπὸ τῆς τομῆς δίχα διαιρεθήσεται.



ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ $AB\Gamma$, $\varDelta EZ$ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ $\varLambda H$, $\varLambda H$, κέντρον δὲ τὸ Θ, ἀσύμπτωτος δὲ ἡ $K\Theta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΘH καὶ ἐκβεβλήσθω, ἐπεζεύχθω δὲ καὶ ἡ

7. τῷ] pc, corr. ex τό m. 1 V. 11. $Z\Theta$] $\Xi\Theta$ V; corr. Memus. 27. $\varDelta H$] $H\varDelta$ Halley cum Comm.

allela ducatur ZK, per Θ autem rectae $\varDelta E$ parallela $\Theta\varLambda K$. dico, esse $K\varLambda = \Theta\varLambda$.

per B, $\varLambda$ rectae $A\Gamma$ parallelae ducantur $\varLambda M$, BE; erit igitur, ut antea demonstratum est [prop. XXX ex II, 1 et I, 21]
$\varDelta B^2 : BE^2 = \Theta M^2 : M\varLambda^2$ [Eucl. VI, 4] $= BM \times MH : M\varLambda^2$. itaque [Eucl. V, 9] $HM \times MB = M\Theta^2$. uerum etiam $\Theta\varDelta \times \varDelta Z = \varDelta B^2$, quia $\varDelta Z$ contingit, et $\varLambda\Theta$ ordinate ducta est [I, 37]. itaque
$HM \times MB + \varDelta B^2 = \Theta\varDelta \times \varDelta Z + M\Theta^2 = \varLambda M^2$
[Eucl. II, 6]. $Z\Theta$ igitur in M in duas partes aequales secta est adiectam habens $\varDelta Z$ [Eucl. II, 6]. et KZ, $\varLambda M$ parallelae sunt; ergo $K\varLambda = \varLambda\Theta$ [Eucl. VI, 2].

XXXIII.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, per puncta autem contactus recta ducitur, et per punctum concursus contingentium recta rectae puncta contactus coniungenti parallela ducitur, per punctum autem medium rectae puncta contactus coniungentis recta alterutri asymptotarum parallela ducitur concurrens cum sectione et cum recta per punctum concursus parallela ducta, recta inter punctum medium parallelamque posita a sectione in duas partes aequales secabitur.

sint oppositae $AB\Gamma$, $\varDelta EZ$ contingentesque $\varLambda H$, $\varDelta H$, centrum autem Θ et asymptota $K\Theta$, ducaturque ΘH et producatur, ducatur autem etiam $A\varLambda\varDelta$; manifestum igitur, eam in $\varLambda$ in duas partes aequales secari [II, 30]. iam per H, Θ rectae $A\varDelta$ parallelae ducantur $B\Theta E$,

$A\Lambda\Delta$· φανερὸν δή, ὅτι δίχα τέμνεται κατὰ τὸ Λ. ἤχθωσαν δὴ διὰ τῶν H, Θ παρὰ τὴν $A\Delta$ αἱ $B\Theta E$, ΓHZ, παρα δὲ τὴν ΘK διὰ τοῦ Λ ἡ ΛMN. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΛM τῇ MN.

κατήχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν E, M παρὰ τὴν $H\Theta$ αἱ EK, $M\Xi$, διὰ δὲ τοῦ M παρὰ τὴν $A\Delta$ ἡ $M\Pi$.

ἐπεὶ οὖν διὰ τὰ δεδειγμένα ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΘE πρὸς τὸ ἀπὸ EK, τὸ ὑπὸ $B\Xi E$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞM, ὡς ἄρα τὸ ἀπο ΘE πρὸς τὸ ἀπὸ EK, τὸ ὑπὸ $B\Xi E$ μετὰ τοῦ ἀπὸ ΘE, ὅ ἐστι τὸ ἀπὸ $\Theta\Xi$, πρὸς τὰ ἀπὸ KE, ΞM. τὸ δὲ ἀπὸ KE ἴσον δέδεικται τῷ ὑπὸ $H\Theta\Lambda$, καὶ τὸ ἀπὸ ΞM τῷ ἀπὸ $\Theta\Pi$· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΘE πρὸς τὸ ἀπὸ EK, τὸ ἀπὸ $\Theta\Xi$, τουτέστι το ἀπὸ $M\Pi$, πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta H$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Theta\Pi$. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΘE πρὸς τὸ ἀπὸ KE, τὸ ἀπὸ $M\Pi$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Pi\Lambda$· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ $M\Pi$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Pi\Lambda$, τὸ ἀπὸ $M\Pi$ πρὸς τὸ ὑπὸ $H\Theta\Lambda$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Theta\Pi$. ἴσον ἄρα τὸ ἀπὸ $\Lambda\Pi$ τῷ ὑπὸ $H\Theta\Lambda$ μετὰ τοῦ ἀπὸ $\Theta\Pi$. εὐθεῖα ἄρα ἡ ΛH τέτμηται εἰς μὲν ἴσα κατὰ τὸ Π, εἰς δὲ ἄνισα κατὰ τὸ Θ. καί εἰσι παράλληλοι αἱ $M\Pi$, HN· ἴση ἄρα ἡ ΛM τῇ MN.

λδʹ.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἐπὶ μιᾶς τῶν ἀσυμπτώτων ληφθῇ τι σημεῖον, καὶ ἀπ' αὐτοῦ εὐθεῖα ἐφάπτηται τῆς τομῆς, καὶ διὰ τῆς ἁφῆς ἀχθῇ παράλληλος τῇ ἀσυμπτώτῳ, ἡ διὰ τοῦ ληφθέντος σημείου ἀγομένη παράλληλος τῇ ἑτέρᾳ τῶν ἀσυμπτώτων ὑπὸ τῆς τομῆς εἰς ἴσα διαιρεθήσεται.

---

6. τήν] pc, τ corr. ex δ m. 1 V. 8. $B\Xi E$] ΞE V; corr. Memus. 9. $B\Xi E$] c, corr. ex BZE m. 1 V. 10. ΘE, ὅ] θεο V; corr. p. 11. $H\Theta\Lambda$] $\Theta H\Lambda$ V; corr. p (τῶν $H\Theta$, $\Theta\Lambda$). 14. $\Lambda\Theta H$] $\Theta\Lambda$, ΘH V; corr. p (τῶν $H\Theta$, $\Theta\Lambda$).

ΓHZ, rectae autem ΘK parallela per Λ recta ΛMN. dico, esse $\Lambda M = MN$.

ducantur enim ab E, M rectae $H\Theta$ parallelae EK, $M\Xi$, per M autem rectae $A\Delta$ parallela $M\Pi$.

quoniam igitur propter ea, quae demonstrata sunt [prop. XXX ex II, 1 et I, 21],

$$\Theta E^2 : EK^2 = B\Xi \times \Xi E : \Xi M^2,$$

erit

$$\Theta E^2 : EK^2 = B\Xi \times \Xi E + \Theta E^2 : KE^2 + \Xi M^2 \text{ [Eucl. V, 12]}$$
$$= \Theta\Xi^2 : KE^2 + \Xi M^2 \text{ [Eucl. II, 6].}$$

demonstrauimus autem [I, 38 coll. II, 1 et I deff. alt. 3], esse $H\Theta \times \Theta\Lambda = KE^2$, et [Eucl. I, 34] $\Xi M^2 = \Theta\Pi^2$; itaque

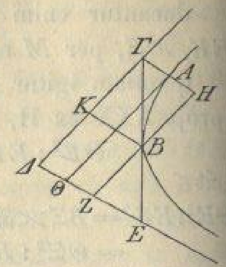
$$\Theta E^2 : EK^2 = \Theta\Xi^2 : \Lambda\Theta \times \Theta H + \Theta\Pi^2$$
$$= M\Pi^2 : \Lambda\Theta \times \Theta H + \Theta\Pi^2 \text{ [Eucl. I, 34].}$$

est autem $\Theta E^2 : KE^2 = M\Pi^2 : \Pi\Lambda^2$ [Eucl. VI, 4]; itaque $M\Pi^2 : \Pi\Lambda^2 = M\Pi^2 : H\Theta \times \Theta\Lambda + \Theta\Pi^2$. quare $\Lambda\Pi^2 = H\Theta \times \Theta\Lambda + \Theta\Pi^2$ [Eucl. V, 9]. itaque recta ΛH in Π in partes aequales, in Θ autem in inaequales secta est [Eucl. II, 5]. et $M\Pi$, HN parallelae sunt; ergo $\Lambda M = MN$ [Eucl. VI, 2].

XXXIV.

Si in hyperbola in alterutra asymptotarum punctum aliquod sumitur, et ab eo recta sectionem contingit, per punctum contactus autem recta asymptotae parallela ducitur, recta per punctum sumptum alteri asymptotae parallela ducta a sectione in partes aequales secabitur.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $\Gamma\Delta E$, καὶ εἰλήφθω ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ τυχὸν σημεῖον τὸ Γ, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω ἐφαπτομένη τῆς τομῆς ἡ ΓBE, καὶ διὰ μὲν τοῦ B παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ ἤχθω ἡ ZBH, διὰ δὲ τοῦ Γ τῇ ΔE ἡ ΓAH. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΓA τῇ AH.



ἤχθω γὰρ διὰ μὲν τοῦ A τῇ $\Gamma\Delta$ παράλληλος ἡ $A\Theta$, διὰ δὲ τοῦ B τῇ ΔE ἡ BK. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΓB τῇ BE, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΓK τῇ $K\Delta$ καὶ ἡ ΔZ τῇ ZE. καὶ ἐπεὶ τὸ ὑπὸ KBZ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $\Gamma A\Theta$, ἴση δὲ ἡ BZ τῇ ΔK, τουτέστι τῇ ΓK, καὶ ἡ $A\Theta$ τῇ $\Delta\Gamma$, τὸ ἄρα ὑπὸ $\Delta\Gamma A$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $K\Gamma H$. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $\Delta\Gamma$ πρὸς ΓK, ἡ ΓH πρὸς $A\Gamma$. διπλῆ δὲ ἡ $\Delta\Gamma$ τῆς ΓK· διπλῆ ἄρα καὶ ἡ ΓH τῆς $A\Gamma$. ἴση ἄρα ἡ ΓA τῇ AH.

λε'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ ληφθέντος σημείου εὐθεῖά τις ἀχθῇ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ τμήματα τῆς ἐντὸς ἀπολαμβανομένης εὐθείας.

ἔστω γὰρ ἡ AB ὑπερβολὴ καὶ αἱ $\Gamma\Delta E$ ἀσύμπτωτοι καὶ ἡ ΓBE ἐφαπτομένη καὶ ἡ ΘB παράλληλος, καὶ διὰ τοῦ Γ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ $\Gamma A\Lambda ZH$ τέμνουσα τὴν τομὴν κατὰ τὰ A, Z. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ $Z\Gamma$ πρὸς ΓA, ἡ $Z\Lambda$ πρὸς $A\Lambda$.

ἤχθωσαν γὰρ διὰ τῶν Γ, A, B, Z παρὰ τὴν ΔE

12. KBZ] KZB V; corr. p (τῶν KB, BZ). 17. ΓA] ηγα V; corr. p. 21. ἡ ὅλη?

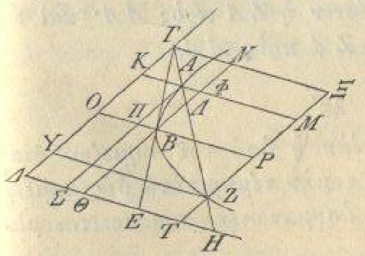
sit hyperbola AB, asymptotae autem $\Gamma\Delta$, ΔE, et in $\Gamma\Delta$ punctum quoduis sumatur Γ, et per id sectionem contingens ducatur ΓBE, et per B rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur ZBH, per Γ autem rectae ΔE parallela ducatur ΓAH. dico, esse $\Gamma A = AH$.

ducatur enim per A rectae $\Gamma\Delta$ parallela $A\Theta$, per B autem rectae ΔE parallela BK. iam quoniam est $\Gamma B = BE$ [II, 3], erit etiam $\Gamma K = K\Delta$ et $\Delta Z = ZE$ [Eucl. VI, 2]. et quoniam $KB \times BZ = \Gamma A \times A\Theta$ [II, 12], et $BZ = \Delta K$ [Eucl. I, 34] $= \Gamma K$, et $A\Theta = \Delta\Gamma$ [ib.], erit $\Delta\Gamma \times \Gamma A = K\Gamma \times \Gamma H$. itaque [Eucl. VI, 16] $\Delta\Gamma : \Gamma K = \Gamma H : A\Gamma$. uerum $\Delta\Gamma = 2\,\Gamma K$; itaque etiam $\Gamma H = 2\,A\Gamma$. ergo $\Gamma A = AH$.

XXXV.

Iisdem positis si a puncto sumpto recta ducitur sectionem in duobus punctis secans, erunt, ut tota ad partem extrinsecus abscisam, ita partes rectae intra abscisae.

sit enim hyperbola AB, asymptotae $\Gamma\Delta$, ΔE, contingens ΓBE, parallela ΘB, et per Γ recta ducatur $\Gamma A\Lambda ZH$ sectionem secans in A, Z. dico, esse $Z\Gamma : \Gamma A = Z\Lambda : A\Lambda$.



nam per Γ, A, B, Z rectae ΔE parallelae ducantur $\Gamma N\Xi$, KAM, $O\Pi BP$, $Z\Upsilon$, per A, Z autem rectae $\Gamma\Delta$ parallelae $A\Pi\Sigma$, $TZPM\Xi$. quoniam igitur $A\Gamma = ZH$ [II, 8], erit etiam αἱ ΓΝΞ, ΚΑΜ, ΟΠΒΡ, ΖΥ, διὰ δὲ τῶν Α, Ζ παρὰ τὴν ΓΔ αἱ ΑΠΣ, ΤΖΡΜΞ.

ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΑΓ τῇ ΖΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ΚΑ τῇ ΤΗ. ἡ δὲ ΚΑ τῇ ΔΣ· καὶ ἡ ΤΗ ἄρα τῇ ΔΣ ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΓΚ τῇ ΔΥ, ἴση καὶ ἡ ΔΚ τῇ ΓΥ· ὡς ἄρα ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ. ὡς δὲ ἡ ΥΓ πρὸς ΓΚ, ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, ὡς δὲ ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ὡς δὲ ἡ ΔΚ πρὸς ΚΓ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΜΔ πρὸς τὸ ΔΑ, τὸ ΘΚ πρὸς ΚΝ. ἴσον δὲ τὸ ΑΔ τῷ ΔΒ, τουτέστι τῷ ΟΝ· ἴση γὰρ ἡ ΓΒ τῇ ΒΕ καὶ ἡ ΔΟ τῇ ΟΓ. ὡς ἄρα τὸ ΔΜ πρὸς ΟΝ, τὸ ΚΘ πρὸς ΚΝ, καὶ λοιπὸν τὸ ΜΘ πρὸς λοιπὸν τὸ ΒΚ ἐστιν, ὡς ὅλον τὸ ΔΜ πρὸς ὅλον τὸ ΟΝ. καὶ ἐπεὶ ἴσον ἐστὶ τὸ ΚΣ τῷ ΘΟ, κοινὸν ἀφῃρήσθω τὸ ΔΠ· λοιπὸν ἄρα τὸ ΚΠ ἴσον ἐστὶ τῷ ΠΘ. κοινὸν προσκείσθω τὸ ΑΒ· ὅλον ἄρα τὸ ΚΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ΑΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, οὕτως τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ΜΔ πρὸς ΔΑ, ἡ ΜΚ πρὸς ΚΑ, τουτέστιν ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ὡς δὲ τὸ ΜΘ πρὸς ΘΑ, ἡ ΜΦ πρὸς ΦΑ, τουτέστιν ἡ ΖΑ πρὸς ΑΔ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΖΓ πρὸς ΓΑ, ἡ ΖΑ πρὸς ΑΔ.

λς'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἡ ἀπὸ τοῦ σημείου διαγομένη εὐθεῖα μήτε τὴν τομὴν τέμνῃ κατὰ δύο σημεῖα μήτε παράλληλος ᾖ τῇ ἀσυμπτώτῳ, συμπεσεῖται μὲν

2. ΖΤΡΜΞ V; corr. p. 4. ΚΑ] (pr.) ΓΑ V; corr. p. 6. ΔΚ] (pr.) ΔΓ V; corr. p. 15. ΔΜ] ΛΜ V; corr. Comm. 22. ΖΑ] ΧΑ V; corr. p.

$KA = TH$ [Eucl. VI, 4]. uerum $KA = \varDelta\Sigma$ [Eucl. I, 34]; itaque etiam $TH = \varDelta\Sigma$. quare etiam $\Gamma K = \varDelta\Upsilon$ [Eucl. VI, 4; I, 34]. et quoniam $\Gamma K = \varDelta\Upsilon$, erit etiam $\varDelta K = \Gamma\Upsilon$. itaque $\varDelta K : K\Gamma = \Upsilon\Gamma : \Gamma K$ [Eucl. V, 7]. est autem

$$\Upsilon\Gamma : \Gamma K = Z\Gamma : \Gamma A \text{ [Eucl. VI, 4]}$$
$$= MK : KA \text{ [Eucl. VI, 4; V, 12, 16]} = M\varDelta : \varDelta A$$

[Eucl. VI, 1], et [ib.] $\varDelta K : K\Gamma = \Theta K : KN$; quare etiam $M\varDelta : \varDelta A = \Theta K : KN$. est autem

$$A\varDelta = \varDelta B \text{ [II, 12]} = ON \text{ [Eucl. VI, 1]};$$

nam $\Gamma B = BE$ [II, 3] et $\varDelta O = O\Gamma$ [Eucl. VI, 2]. itaque $\varDelta M : ON = K\Theta : KN$, et reliquum

$$M\Theta : BK = \varDelta M : ON \text{ [Eucl. V, 19]}.$$

et quoniam est $K\Sigma = \Theta O$ [II, 12], auferatur, quod commune est, $\varDelta\Pi$; itaque reliquum $K\Pi = \Pi\Theta$. commune adiiciatur AB; itaque totum $KB = A\Theta$. quare $M\varDelta : \varDelta A = M\Theta : \Theta A$. uerum

$$M\varDelta : \varDelta A = MK : KA \text{ [Eucl. VI, 1]} = Z\Gamma : \Gamma A,$$

et

$$M\Theta : \Theta A = M\Phi : \Phi A \text{ [Eucl. VI, 1]} = ZA : A\varDelta \text{ [Eucl. VI, 2]}.$$

ergo etiam $Z\Gamma : \Gamma A = ZA : A\varDelta$.

XXXVI.

Iisdem positis si recta a puncto illo ducta neque sectionem in duobus punctis secat neque asymptotae parallela est, cum sectione opposita concurret, et ut tota ad partem inter sectionem parallelamque per punctum contactus ductam, ita erit recta inter sectioτῇ ἀντικειμένῃ τομῇ, ἔσται δέ, ὡς ὅλη πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς διὰ τῆς ἁφῆς παραλλήλου, ἡ μεταξὺ τῆς ἀντικειμένης καὶ τῆς ἀσυμπτώτου πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς ἀσυμπτώτου καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ ΔΕ, ΖΗ, καὶ ἐπὶ τῆς ΓΗ σημεῖον εἰλήφθω τὸ Η, καὶ ἀπ' αὐτοῦ ἤχθω ἡ μὲν ΗΒΕ ἐφαπτομένη, ἡ δὲ ΗΘ μήτε παράλληλος οὖσα τῇ ΓΕ μήτε τὴν τομὴν τέμνουσα κατὰ δύο σημεῖα.

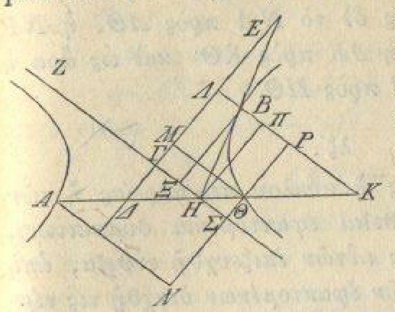
ὅτι μὲν ἡ ΘΗ ἐκβαλλομένη συμπίπτει τῇ τε ΓΔ καὶ διὰ τοῦτο καὶ τῇ Α τομῇ, δέδεικται. συμπιπτέτω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ Β τῇ ΓΗ παράλληλος ἡ ΚΒΛ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΛΚ πρὸς ΚΘ, οὕτως ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Λ, Θ σημείων παρὰ τὴν ΓΗ αἱ ΘΜ, ΛΝ, ἀπὸ δὲ τῶν Β, Η, Θ παρὰ τὴν ΔΕ αἱ ΒΞ, ΗΠ, ΡΘΣΝ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ΛΔ τῇ ΗΘ, ἔστιν, ὡς ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΛΗ πρὸς ΗΘ, ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ὡς δὲ ἡ ΔΘ πρὸς ΘΗ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ· καὶ ὡς ἄρα ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, ἡ ΓΣ πρὸς ΣΗ. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ ΝΣ πρὸς ΣΘ, τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὡς δὲ ἡ ΓΣ προς ΣΗ, τὸ ΡΓ πρὸς ΡΗ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς τὸ ΓΘ, τὸ ΓΡ πρὸς τὸ ΡΗ. καὶ ὡς ἓν πρὸς ἕν, οὕτως ἅπαντα πρὸς ἅπαντα· ὡς ἄρα τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, ὅλον τὸ ΝΛ πρὸς ΓΘ καὶ ΡΗ. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ ΕΒ τῇ ΒΗ, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΠ καὶ τὸ ΔΞ τῷ ΒΗ. τὸ δὲ ΔΞ ἴσον τῷ ΓΘ· καὶ τὸ ΒΗ ἄρα ἴσον τῷ ΓΘ. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ΝΓ πρὸς ΓΘ, οὕτως ὅλον τὸ ΛΝ προς τὸ ΒΗ

1. ἡ ὅλη? 2. ἁφῆς] om. V; corr. Memus. 13. ΚΒΛ] ΒΚΛ V; corr. p (ΛΒΚ). 17. ΡΘΣΝ] ΘΡΣΝ V; corr. p.

nem oppositam asymptotamque posita ad rectam inter asymptotam alteramque sectionem positam.

sint oppositae A, B, quarum centrum sit Γ, asymptotae autem ΔE, ZH, et in ΓH sumatur punctum H, ab eoque contingens ducatur HBE, $H\Theta$ autem ita, ut neque rectae ΓE parallela sit neque sectionem in duobus punctis secet.



iam rectam ΘH productam et cum $\Gamma\Delta$ concurrere et ea de causa cum sectione, demonstratum est [II, 11]. concurrat in Λ, et per B rectae ΓH parallela ducatur $KB\Lambda$. dico, esse $\Lambda K : K\Theta = \Lambda H : H\Theta$.

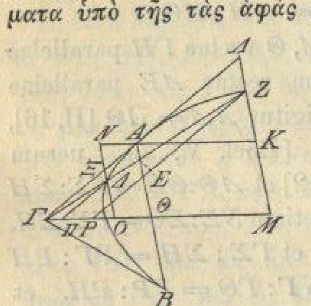
ducantur enim a punctis Λ, Θ rectae ΓH parallelae ΘM, ΛN, a B, H, Θ autem rectae ΔE parallelae $B\Xi$, $H\Pi$, $P\Theta\Sigma N$. quoniam igitur $\Lambda\Delta = H\Theta$ [II, 16], erit $\Lambda H : H\Theta = \Delta\Theta : \Theta H$ [Eucl. V, 7]. uerum $\Lambda H : H\Theta = N\Sigma : \Sigma\Theta$ [Eucl. VI, 2] et $\Delta\Theta : \Theta H = \Gamma\Sigma : \Sigma H$ [Eucl. VI, 4; V, 12, 16]; quare etiam $N\Sigma : \Sigma\Theta = \Gamma\Sigma : \Sigma H$. uerum $N\Sigma : \Sigma\Theta = N\Gamma : \Gamma\Theta$ et $\Gamma\Sigma : \Sigma H = P\Gamma : PH$ [Eucl. VI, 1]; quare etiam $N\Gamma : \Gamma\Theta = \Gamma P : PH$. et ut unum ad unum, ita omnia ad omnia [Eucl. V, 12]; itaque $N\Gamma : \Gamma\Theta = N\Lambda : \Gamma\Theta + PH$. et quoniam est $EB = BH$ [II, 3], erit etiam [Eucl. VI, 2; I, 34] $\Delta B = B\Pi$, $\Delta\Xi = BH$ [Eucl. VI, 1]. est autem $\Delta\Xi = \Gamma\Theta$ [II, 12]; quare etiam $BH = \Gamma\Theta$. itaque

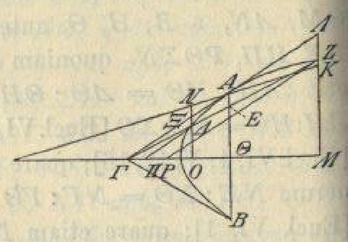
18. ἡ ΔΘ — 19. ΗΘ] om. V; corr. Comm. 22. τὸ ΝΓ] τὸν γ̄ V; corr. pvc. 26. ΡΗ] ἡ ρ̄η V; corr. p.

καὶ PH, τουτέστι τὸ $P\Xi$. ἴσον δὲ τὸ $P\Xi$ τῷ $\Delta\Theta$, ἐπεὶ καὶ τὸ $\Gamma\Theta$ τῷ $B\Gamma$ καὶ τὸ MB τῷ $\Xi\Theta$. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ $N\Gamma$ πρὸς τὸ $\Gamma\Theta$, οὕτως τὸ $N\Delta$ πρὸς $\Delta\Theta$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ $N\Gamma$ πρὸς $\Gamma\Theta$, ἡ $N\Sigma$ πρὸς $\Sigma\Theta$, τουτέστιν ἡ AH πρὸς $H\Theta$, ὡς δὲ τὸ $N\Delta$ πρὸς $\Delta\Theta$, ἡ NP πρὸς $P\Theta$, τουτέστιν ἡ AK πρὸς $K\Theta$· καὶ ὡς ἄρα ἡ AK πρὸς $K\Theta$, ἡ AH πρὸς $H\Theta$.

λζ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ ἐπὶ μὲν τὰς ἁφὰς αὐτῶν ἐπιζευχθῇ εὐθεῖα, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων διαχθῇ τις τέμνουσα τὴν γραμμὴν κατὰ δύο σημεῖα, ἔσται, ὡς ὅλη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.





ἔστω κώνου τομὴ ἡ AB καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ $A\Gamma$, ΓB, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB, καὶ διήχθω ἡ $\Gamma\Delta EZ$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΓZ πρὸς $\Gamma\Delta$, ἡ ZE πρὸς $E\Delta$.

ἤχθωσαν διὰ τῶν Γ, A διάμετροι τῆς τομῆς αἱ

2. $B\Gamma$] $B\Theta$ V; corr. Memus. 13. ἡ ὅλη? 15. τῆς] τῆς ἐπί V; corr. Memus. 18. ΓZ] $\Gamma\Delta$ V; corr. p ($Z\Gamma$). $\Gamma\Delta$] ΓZ V; corr. p.

$N\Gamma : \Gamma\Theta = AN : BH + PH = AN : P\Xi$. est autem $P\Xi = \Delta\Theta$, quoniam etiam $\Gamma\Theta = B\Gamma$ [II, 12] et $MB = \Xi\Theta$. itaque $N\Gamma : \Gamma\Theta = N\Delta : \Delta\Theta$. uerum

$$N\Gamma : \Gamma\Theta = N\Sigma : \Sigma\Theta \text{ [Eucl. VI, 1]} = AH : H\Theta$$

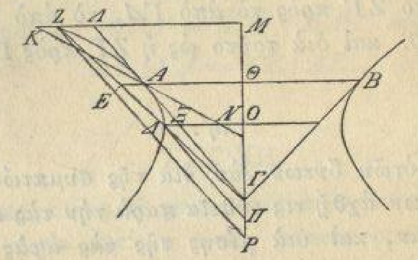
[Eucl. VI, 2], et

$$N\Delta : \Delta\Theta = NP : P\Theta \text{ [Eucl. VI, 1]}$$
$$= AK : K\Theta \text{ [Eucl. VI, 4; V, 12, 16]}.$$

ergo etiam $AK : K\Theta = AH : H\Theta$.

XXXVII.

Si duae rectae coni sectionem uel ambitum circuli uel sectiones oppositas contingentes concurrunt, et ad puncta contactus earum recta ducitur, a puncto autem concursus contingentium recta ducitur lineam in duobus punctis secans, erunt, ut tota ad partem extrinsecus abscisam, ita partes a recta puncta contactus coniungenti effectae.



sit coni sectio AB contingentesque $A\Gamma$, ΓB, et ducatur AB, ducaturque $\Gamma\Delta EZ$. dico, esse

$$\Gamma Z : \Gamma\Delta = ZE : E\Delta.$$

per Γ, A diametri sectionis ducantur $\Gamma\Theta$, AK,

Praeter nostras figuras duas habet V alios casus in oppositis repraesentantes.

ΓΘ, ΔΚ, διὰ δὲ τῶν Ζ, Δ παρὰ τὰς ΑΘ, ΑΓ αἱ ΔΠ, ΖΡ, ΔΖΜ, ΝΔΟ. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ ΔΖΜ τῇ ΞΔΟ, ἔστιν, ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΔΖ πρὸς ΞΔ καὶ ἡ ΖΜ πρὸς ΔΟ καὶ ἡ ΔΜ πρὸς ΞΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΔΜΓ τρίγωνον πρὸς τὸ ΞΓΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΖΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, τὸ ΖΡΜ τρίγωνον πρὸς τὸ ΔΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΔΓΜ πρὸς τὸ ΞΟΓ, τὸ ΖΡΜ πρὸς τὸ ΔΠΟ, καὶ λοιπὸν τὸ ΔΓΡΖ τετράπλευρον πρὸς λοιπὸν τὸ ΞΓΠΔ. ἴσον δὲ τὸ μὲν ΔΓΡΖ τετράπλευρον τῷ ΑΔΚ τριγώνῳ, τὸ δὲ ΞΓΠΔ τῷ ΑΝΞ· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞΟ, τὸ ΑΔΚ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΝΞ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΔΜ πρὸς τὸ ἀπο ΞΟ, τὸ ἀπὸ ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, ὡς δὲ τὸ ΑΔΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΔΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΞ καὶ τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπο ΖΓ πρὸς τὸ ἀπὸ ΓΔ, τὸ ἀπὸ ΖΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΔ. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΖΓ πρὸς ΓΔ, ἡ ΖΕ πρὸς ΔΕ.

λη'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ τις εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ διὰ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ τὴν τομὴν κατὰ δύο σημεῖα καὶ τὴν διὰ τῆς συμπτώσεως παράλληλον τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς

10. ΔΓΡΖ] p, ΔΓΡΖ corr. ex ΔΓΡΞ m. 1 V. 15. ΔΜ — τὸ ἀπό (alt.)] om. V; corr. p (τῆς ΔΜ, τῆς ΞΟ, ἀπὸ τῆς).

per Z, Δ autem rectis $A\Theta$, $A\Gamma$ parallelae $\Delta\Pi$, ZP, ΔZM, $N\Delta O$. iam quoniam ΔZM, $\Xi\Delta O$ parallelae sunt, erit

$Z\Gamma:\Gamma\Delta = \Delta Z:\Xi\Delta$ [Eucl. VI, 4] $= ZM:\Delta O = \Delta M:\Xi O$;

quare etiam $\Delta M^2 : \Xi O^2 = ZM^2 : \Delta O^2$. uerum

$$\Delta M^2 : \Xi O^2 = \Delta M\Gamma : \Xi\Gamma O \text{ [Eucl. VI, 19]},$$

et $ZM^2 : O\Delta^2 = ZPM : \Delta\Pi O$; quare etiam

$\Delta\Gamma M:\Xi O\Gamma = ZPM:\Delta\Pi O = \Delta\Gamma PZ:\Xi\Gamma\Pi\Delta$ [Eucl. V, 19].

uerum $\Delta\Gamma PZ = A\Delta K$, $\Xi\Gamma\Pi\Delta = AN\Xi$ [II, 30; II, 5–6; III, 2; — III, 11]; itaque

$$\Delta M^2 : \Xi O^2 = A\Delta K : AN\Xi.$$

est autem $\Delta M^2 : \Xi O^2 = Z\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2$,

$$A\Delta K : AN\Xi = \Delta A^2 : A\Xi^2 \text{ [Eucl. VI, 19]}$$
$$= ZE^2 : E\Delta^2 \text{ [Eucl. VI, 2]};$$

quare etiam $Z\Gamma^2 : \Gamma\Delta^2 = ZE^2 : E\Delta^2$. ergo

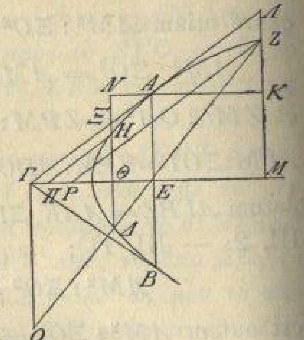
$$Z\Gamma : \Gamma\Delta = ZE : \Delta E.$$

XXXVIII.

Iisdem positis si per punctum concursus contingentium recta ducitur rectae puncta contactus coniungenti parallela, rectaque per mediam rectam puncta contactus coniungentem ducta sectionem secat in duobus punctis rectamque per punctum concursus rectae puncta contactus coniungenti parallelam ductam, erunt, ut tota recta ita ducta ad partem extrinsecus inter sectionem parallelamque abscisam, ita partes a recta ad puncta contactus ducta effectae.

καὶ τῆς παραλλήλου, τὰ γινόμενα τμήματα ὑπὸ τῆς ἐπὶ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυμένης.

ἔστω ἡ AB τομὴ καὶ αἱ $A\Gamma$, $B\Gamma$ ἐφαπτόμεναι καὶ ἡ AB τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσα καὶ αἱ AN, ΓM διάμετροι· φανερὸν δή, ὅτι ἡ AB δίχα τέτμηται κατὰ τὸ E.



ἤχθω ἀπὸ τοῦ Γ τῇ AB παράλληλος ἡ ΓO, καὶ διήχθω διὰ τοῦ E ἡ $ZE\Delta O$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ZO πρὸς $O\Delta$, ἡ ZE πρὸς $E\Delta$.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Z, Δ παρὰ τὴν AB αἱ ΛZKM, $\Delta\Theta H\Xi N$, διὰ δὲ τῶν Z, H παρὰ τὴν $A\Gamma$ αἱ ZP, $H\Pi$. ὁμοίως δὴ τοῖς πρότερον δειχθήσεται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΛM πρὸς τὸ ἀπὸ $\Xi\Theta$, τὸ ἀπὸ ΛA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Xi$. καί ἐστιν, ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΛM πρὸς τὸ ἀπὸ $\Xi\Theta$, τὸ ἀπὸ $\Lambda\Gamma$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Gamma\Xi$ καὶ τὸ ἀπὸ ZO πρὸς τὸ ἀπὸ $O\Delta$, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΛA πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Xi$, τὸ ἀπὸ ZE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Delta$· ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ZO πρὸς τὸ ἀπὸ $O\Delta$, τὸ ἀπὸ ZE πρὸς τὸ ἀπὸ $E\Delta$, καὶ ὡς ἡ ZO πρὸς $O\Delta$, ἡ ZE πρὸς $E\Delta$.

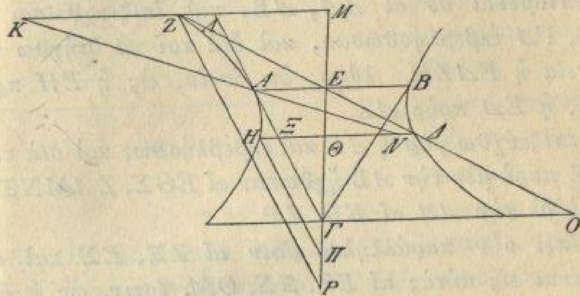
λθ΄.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ τῶν ἁφῶν εὐθεῖα ἐκβληθῇ, ἀπὸ δὲ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθεῖσα εὐθεῖα

9. $ZEO\Delta$ V; corr. p. 13. Z] Ξ V; corr. p. 14. $\Delta\Theta HN\Xi N$ V; corr. Memus. 20. $O\Delta$] $\Lambda\Delta$ V; corr. p. 23. In $E\Delta$ (alt.) desinit uol. I codicis V (fol. 120).

sit sectio AB, contingentes $A\Gamma$, $B\Gamma$, puncta contactus coniungens AB, diametri AN, ΓM; manifestum igitur, AB in E in duas partes aequales secari [II, 30, 39].

a Γ rectae AB parallela ducatur ΓO, et per E ducatur $ZE\Delta O$. dico, esse $ZO : O\Delta = ZE : E\Delta$.



nam a Z, Δ rectae AB parallelae ducantur ΛZKM, $\Delta\Theta H\Xi N$, per Z, H autem rectae $A\Gamma$ parallelae ZP, $H\Pi$. iam eodem modo, quo antea, demonstrabimus, esse $\Lambda M^2 : \Xi\Theta^2 = \Lambda A^2 : A\Xi^2$ [u. prop. XXXVII]. est autem

$$\Lambda M^2 : \Xi\Theta^2 = \Lambda\Gamma^2 : \Gamma\Xi^2 \text{ [Eucl. VI, 4]}$$
$$= ZO^2 : O\Delta^2 \text{ [Eucl. VI, 2]},$$

et $\Lambda A^2 : A\Xi^2 = ZE^2 : E\Delta^2$ [Eucl. VI, 2]; itaque $ZO^2 : O\Delta^2 = ZE^2 : E\Delta^2$ et $ZO : O\Delta = ZE : E\Delta$.

XXXIX.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et per puncta contactus recta ducitur, a puncto autem concursus contingentium ducta recta utramque sectio-

In V figura 2 minus adcurate descripta est; V praeterea tertiam figuram oppositarum habet.

τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς τομῆς καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων.

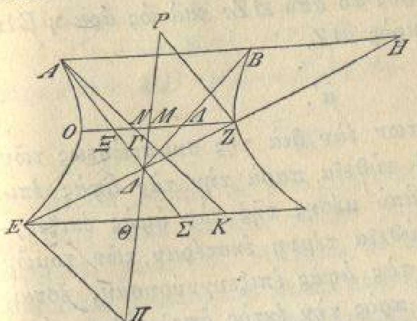
ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ A, B, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ $A\Delta$, ΔB, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ AB, $\Gamma\Delta$ ἐκβεβλήσθωσαν, καὶ διὰ τοῦ Δ διήχθω τις εὐθεῖα ἡ $E\Delta ZH$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ EH πρὸς HZ, ἡ $E\Delta$ πρὸς ΔZ.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $A\Gamma$ καὶ ἐκβεβλήσθω, καὶ διὰ τῶν E, Z παρὰ μὲν τὴν AB ἤχθωσαν αἱ $E\Theta\Sigma$, $Z\Lambda MN\Xi O$, παρὰ δὲ τὴν $A\Delta$ αἱ $E\Pi$, ZP.

ἐπεὶ οὖν παράλληλοί εἰσιν αἱ $Z\Xi$, $E\Sigma$ καὶ διηγμέναι εἰς αὐτὰς αἱ EZ, $\Xi\Sigma$, ΘM, ἔστιν, ὡς ἡ $E\Theta$ πρὸς $\Theta\Sigma$, ἡ ZM πρὸς $M\Xi$. καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ $E\Theta$ πρὸς ZM, ἡ $\Theta\Sigma$ πρὸς ΞM· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘE πρὸς τὸ ἀπὸ MZ, τὸ ἀπὸ $\Theta\Sigma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞM. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ $E\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ MZ, τὸ $E\Theta\Pi$ τρίγωνον πρὸς τὸ ZPM, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ $\Theta\Sigma$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΞM, τὸ $\Delta\Theta\Sigma$ τρίγωνον πρὸς τὸ $\Xi M\Delta$· καὶ ὡς ἄρα τὸ $E\Theta\Pi$ πρὸς τὸ ZPM, τὸ $\Delta\Theta\Sigma$ πρὸς τὸ $\Xi M\Delta$. ἴσον δὲ τὸ μὲν $E\Theta\Pi$ τοῖς $A\Sigma K$, $\Theta\Delta\Sigma$, τὸ δὲ PMZ τοῖς $A\Xi N$, $\Delta M\Xi$· ὡς ἄρα τὸ $\Delta\Theta\Sigma$ πρὸς τὸ $\Xi M\Delta$, τὸ $A\Sigma K$ μετὰ τοῦ $\Theta\Delta\Sigma$ πρὸς τὸ $A\Xi N$ μετὰ τοῦ $\Xi M\Delta$, καὶ λοιπὸν τὸ $A\Sigma K$ πρὸς λοιπὸν τὸ $AN\Xi$ ἐστιν, ὡς τὸ $\Delta\Sigma\Theta$ πρὸς τὸ $\Delta\Xi M$. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ

4. τῆς] ὑπὸ τῆς V; ἐπὶ τῆς p; corr. Memus. 8. Δ] E V; corr. Memus. 12. $\Xi\Lambda MN\Xi O$ V; corr. p. 16. ZM] ΞM V; corr. p. 24. $A\Xi N$] $A\Xi M$ V; corr. Memus. 26. τό] (pr.) ego; ὡς τό V; ἄρα τό Halley.

nem rectamque puncta contactus coniungentem secat, erunt, ut tota recta ita ducta ad partem extrinsecus inter sectionem rectamque puncta contactus coniungentem abscisam, ita partes rectae a sectionibus punctoque concursus contingentium effectae.



sint oppositae A, B, quarum centrum sit Γ, contingentes autem $A\Delta$, ΔB, et ductae AB, $\Gamma\Delta$ producantur, per Δ autem ducatur recta aliqua $E\Delta ZH$. dico, esse

$$EH : HZ = E\Delta : \Delta Z.$$

ducatur enim $A\Gamma$ et producatur, et per E, Z rectae AB parallelae ducantur $E\Theta\Sigma$, $Z\Lambda MN\Xi O$, rectae autem $A\Delta$ parallelae $E\Pi$, ZP.

iam quoniam parallelae sunt $Z\Xi$, $E\Sigma$, et in eas incidunt EZ, $\Xi\Sigma$, ΘM, erit [Eucl. VI, 4] $E\Theta : \Theta\Sigma = ZM : M\Xi$. et permutando [Eucl. V, 16] $E\Theta : ZM = \Theta\Sigma : \Xi M$; quare etiam $\Theta E^2 : MZ^2 = \Theta\Sigma^2 : \Xi M^2$. est autem [Eucl. VI, 19] $E\Theta^2 : MZ^2 = E\Theta\Pi : ZPM$, $\Theta\Sigma^2 : \Xi M^2 = \Delta\Theta\Sigma : \Xi M\Delta$; itaque etiam $E\Theta\Pi : ZPM = \Delta\Theta\Sigma : \Xi M\Delta$. est autem $E\Theta\Pi = A\Sigma K + \Theta\Delta\Sigma$, $PMZ = A\Xi N + \Delta M\Xi$ [prop. XI]; itaque

$$\Delta\Theta\Sigma : \Xi M\Delta = A\Sigma K + \Theta\Delta\Sigma : A\Xi N + \Xi M\Delta$$

et [Eucl. V, 19] $A\Sigma K : AN\Xi = \Delta\Sigma\Theta : \Delta\Xi M$. est autem

ΑΣΚ πρὸς τὸ ΑΝΞ, τὸ ἀπὸ ΚΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΝ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΖΗ, ὡς δὲ τὸ ΔΘΣ πρὸς τὸ ΞΔΜ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΜ, τουτέστι τὸ ἀπὸ ΕΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΖ. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΕΗ πρὸς ΗΖ, ἡ ΕΔ πρὸς ΔΖ.

μ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν διὰ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐφαπτομένων ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, καὶ ἀπὸ μέσης τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης ἀχθεῖσα εὐθεῖα τέμνῃ ἑκατέραν τῶν τομῶν καὶ τὴν παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἔσται, ὡς ὅλη ἡ διηγμένη πρὸς τὴν ἐκτὸς ἀπολαμβανομένην μεταξὺ τῆς παραλλήλου καὶ τῆς τομῆς, οὕτως τὰ γινόμενα τμήματα τῆς εὐθείας ὑπὸ τῶν τομῶν καὶ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ Α, Β, ὧν κέντρον τὸ Γ, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ ΑΔ, ΔΒ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΒ καὶ ἡ ΓΔΕ· ἴση ἄρα ἡ ΑΕ τῇ ΕΒ. καὶ ἀπὸ μὲν τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΒ ἤχθω ἡ ΖΔΗ, ἀπὸ δὲ τοῦ Ε, ὡς ἔτυχεν, ἡ ΛΕ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ ΘΛ πρὸς ΛΚ, ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ.

ἤχθωσαν ἀπὸ τῶν Θ, Κ παρὰ μὲν τὴν ΑΒ αἱ ΝΜΘΞ, ΚΟΠ, παρὰ δὲ τὴν ΑΔ αἱ ΘΡ, ΚΣ, καὶ διήχθω ἡ ΞΑΓΤ.

ἐπεὶ οὖν εἰς παραλλήλους τὰς ΞΜ, ΚΠ διηγμέναι εἰσὶν αἱ ΞΑΥ, ΜΑΠ, ἔστιν, ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ. ἀλλ' ὡς ἡ ΞΑ πρὸς ΑΥ, ἡ ΘΕ

20. ΛΕ] ego; ΔΕ V; ΘΕΚΛ Halley cum Memo. 23. ΝΜΘΞ] ΘΜΝΞ V; corr. p (ΞΘΜΝ). 24. ΞΑΓΤ] ΑΓΞΤ V; corr. p. 26. ΜΑΠ] ΜΑΓ V; corr. p. 27. ΜΑ] ΜΔ V; corr. p.

$\varLambda\Sigma K : \varLambda N\Xi = K\varLambda^2 : \varLambda N^2$ [Eucl. VI, 19] $= EH^2 : ZH^2$ [Eucl. VI, 2; VI, 4; V, 12; V, 16],

et

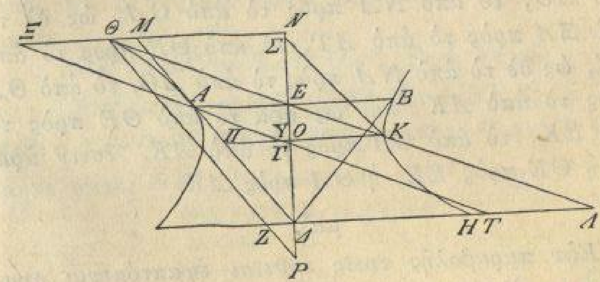
$\varDelta\Theta\Sigma : \Xi\varDelta M = \Theta\varDelta^2 : \varDelta M^2$ [Eucl. VI, 19] $= E\varDelta^2 : \varDelta Z^2$ [Eucl. VI, 4].

ergo etiam $EH : HZ = E\varDelta : \varDelta Z$.

XL.

Iisdem positis si per punctum concursus contingentium recta ducitur rectae puncta contactus coniungenti parallela, et recta a media recta puncta contactus coniungenti ducta utramque sectionem secat rectamque rectae puncta contactus coniungenti parallelam, erunt, ut tota recta ita ducta ad partem extrinsecus inter parallelam sectionemque abscisam, ita partes rectae a sectionibus rectaque puncta contactus coniungenti effectae.

sint oppositae A, B, quarum centrum sit Γ, contingentes autem $A\varDelta$, $\varDelta B$, et ducantur AB et $\Gamma\varDelta E$;



itaque $AE = EB$ [II, 39]. et a $\varDelta$ rectae AB parallela ducatur $Z\varDelta H$, ab E autem quoquo modo $\varLambda E$. dico, esse $\Theta\varLambda : \varLambda K = \Theta E : EK$.

πρὸς ΕΚ· ὡς δὲ ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν ΘΕΝ, ΚΕΟ τριγώνων· ὡς ἄρα ἡ ΘΝ πρὸς ΚΟ, ἡ ΜΑ πρὸς ΑΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΚΟ, τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ. ἀλλ' ὡς μὲν τὸ ἀπὸ ΘΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΚ, τὸ ΘΡΝ τρίγωνον πρὸς τὸ ΚΣΟ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΠ, τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΘΝΡ πρὸς τὸ ΚΟΣ, τὸ ΞΜΑ πρὸς τὸ ΑΥΠ. ἴσον δὲ τὸ ΘΝΡ τοῖς ΞΑΜ, ΜΝΔ, τὸ δὲ ΣΟΚ τοῖς ΑΥΠ, ΔΟΠ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ΞΜΑ μετὰ τοῦ ΜΝΔ τριγώνου πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον μετὰ τοῦ ΠΔΟ τριγώνου, οὕτως τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΠΥΑ τρίγωνον· καὶ λοιπὸν ἄρα τὸ ΝΜΔ πρὸς λοιπὸν τὸ ΔΟΠ τρίγωνόν ἐστιν, ὡς ὅλον πρὸς ὅλον. ἀλλ' ὡς τὸ ΞΜΑ τρίγωνον πρὸς τὸ ΑΥΠ τρίγωνον, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, ὡς δὲ τὸ ΜΔΝ πρὸς τὸ ΠΔΟ, τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ. ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΜΝ πρὸς τὸ ἀπὸ ΠΟ, τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΟΔ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΞΑ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΥ, τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, ὡς δὲ τὸ ἀπὸ ΝΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΟ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ· καὶ ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΘΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΕΚ, τὸ ἀπὸ ΘΔ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔΚ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΘΕ πρὸς ΕΚ, ἡ ΘΔ πρὸς ΔΚ.

μα'.

Ἐὰν παραβολῆς τρεῖς εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσιν ἀλλήλαις, εἰς τὸν αὐτὸν λόγον τμηθήσονται.

4. πρός] (alt.) bis V; corr. p c. 8. τὸ ΞΜΑ] om. V; corr. p. 13. ΞΝΜΔ V; corr. p (ΜΝΔ). 25. ΘΕ] c p, Ε obscurum in V; ΘΣ v.

a Θ, K rectae AB parallelae ducantur $NM\Theta\Xi$, $KO\Pi$, rectae autem $A\Delta$ parallelae ΘP, $K\Sigma$, et ducatur $\Xi A\Gamma T$.

quoniam igitur in parallelas ΞM, $K\Pi$ incidunt $\Xi A\Upsilon$, $MA\Pi$, erit [Eucl. VI, 4] $\Xi A : A\Upsilon = MA : A\Pi$. uerum $\Xi A : A\Upsilon = \Theta E : EK$ [Eucl. VI, 2]; et

$$\Theta E : EK = \Theta N : KO$$

propter similitudinem triangulorum ΘEN, KEO [Eucl. VI, 4]; itaque $\Theta N : KO = MA : A\Pi$. quare etiam $\Theta N^2 : KO^2 = MA^2 : A\Pi^2$. uerum $\Theta N^2 : OK^2 = \Theta PN : K\Sigma O$, $MA^2 : A\Pi^2 = \Xi MA : A\Upsilon\Pi$ [Eucl. VI, 19]; itaque etiam $\Theta NP : KO\Sigma = \Xi MA : A\Upsilon\Pi$. est autem [prop. XI] $\Theta NP = \Xi AM + MN\Delta$ et $\Sigma OK = A\Upsilon\Pi + \Delta O\Pi$; quare etiam

$$\Xi MA + MN\Delta : A\Upsilon\Pi + \Pi\Delta O = \Xi MA : \Pi\Upsilon A.$$

itaque etiam [Eucl. V, 19] $NM\Delta : \Delta O\Pi$, ut totum ad totum. est autem

$\Xi MA : A\Upsilon\Pi = \Xi A^2 : A\Upsilon^2$, $M\Delta N : \Pi\Delta O = MN^2 : \Pi O^2$ [Eucl. VI, 19]; quare etiam $MN^2 : \Pi O^2 = \Xi A^2 : A\Upsilon^2$. uerum

$$MN^2 : \Pi O^2 = N\Delta^2 : O\Delta^2 \text{ [Eucl. VI, 4]},$$
$$\Xi A^2 : A\Upsilon^2 = \Theta E^2 : EK^2 \text{ [Eucl. VI, 2]},$$
$$N\Delta^2 : \Delta O^2 = \Theta\Delta^2 : \Delta K^2 \text{ [Eucl. VI, 4; VI, 2; V, 12; V, 16]};$$

itaque etiam $\Theta E^2 : EK^2 = \Theta\Delta^2 : \Delta K^2$. ergo

$$\Theta E : EK = \Theta\Delta : \Delta K.$$

XLI.

Si tres rectae parabolam contingentes inter se concurrunt, secundum eandem rationem secabuntur.

ἔστω παραβολὴ ἡ $ΑΒΓ$, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ $ΑΔΕ$, $ΕΖΓ$, $ΔΒΖ$. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΖΕ$, ἡ $ΕΔ$ πρὸς $ΔΑ$ καὶ ἡ $ΖΒ$ πρὸς $ΒΔ$.

ἐπεζεύχθω γὰρ ἡ $ΑΓ$ καὶ τετμήσθω δίχα κατὰ τὸ $Η$.

ὅτι μὲν οὖν ἡ ἀπὸ τοῦ $Ε$ ἐπὶ τὸ $Η$ διάμετρός ἐστι τῆς τομῆς, φανερόν.

εἰ μὲν οὖν διὰ τοῦ $Β$ ἔρχεται, παράλληλός ἐστιν ἡ $ΔΖ$ τῇ $ΑΓ$ καὶ δίχα τμηθήσεται κατὰ τὸ $Β$ ὑπὸ τῆς $ΕΗ$, καὶ διὰ τοῦτο ἴση ἔσται ἡ $ΑΔ$ τῇ $ΔΕ$ καὶ ἡ $ΓΖ$ τῇ $ΖΕ$, καὶ φανερὸν τὸ ζητούμενον.

μὴ ἐρχέσθω διὰ τοῦ $Β$, ἀλλὰ διὰ τοῦ $Θ$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ $Θ$ παρὰ τὴν $ΑΓ$ ἡ $ΚΘΛ$· ἐφάψεται ἄρα τῆς τομῆς κατὰ τὸ $Θ$, καὶ διὰ τὰ εἰρημένα ἴση ἔσται ἡ $ΑΚ$ τῇ $ΚΕ$ καὶ ἡ $ΛΓ$ τῇ $ΛΕ$. ἤχθω διὰ μὲν τοῦ $Β$ παρὰ τὴν $ΕΗ$ ἡ $ΜΝΒΞ$, διὰ δὲ τῶν $Α$, $Γ$ παρὰ τὴν $ΔΖ$ αἱ $ΑΟ$, $ΓΠ$. ἐπεὶ οὖν παράλληλός ἐστιν ἡ $ΜΒ$ τῇ $ΕΘ$, διάμετρός ἐστιν ἡ $ΜΒ$· καὶ ἐφάπτεται κατὰ τὸ $Β$ ἡ $ΔΖ$· κατηγμέναι ἄρα εἰσὶν αἱ $ΑΟ$, $ΓΠ$. καὶ ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ $ΜΒ$, ἐφαπτομένη δὲ ἡ $ΓΜ$, κατηγμένη δὲ ἡ $ΓΠ$, ἴση ἔσται ἡ $ΜΒ$ τῇ $ΒΠ$· ὥστε καὶ ἡ $ΜΖ$ τῇ $ΖΓ$. καὶ ἐπεὶ ἴση ἐστὶν ἡ $ΜΖ$ τῇ $ΖΓ$, ἡ $ΕΛ$ τῇ $ΛΓ$, ἔστιν, ὡς ἡ $ΜΓ$ πρὸς $ΓΖ$, ἡ $ΕΓ$ πρὸς $ΓΛ$· καὶ ἐναλλάξ, ὡς ἡ $ΜΓ$ πρὸς $ΓΕ$, ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΓΛ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΜΓ$ πρὸς $ΓΕ$, ἡ $ΞΓ$ πρὸς $ΓΗ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΓΛ$, ἡ $ΞΓ$ πρὸς $ΓΗ$. ὡς δὲ ἡ $ΗΓ$ πρὸς $ΓΛ$, ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΕ$ [διπλασία γὰρ ἑκατέρα]· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΞ$, ἡ $ΕΓ$ πρὸς $ΓΖ$,

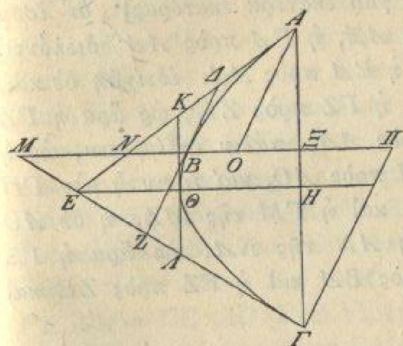
13. $ΚΘΛ$] $ΘΚΛ$ V; corr. p. 20. Post $ΜΒ$ del. m. 1 τῇ $ΕΘ$ διάμετρός ἐστιν ἡ $ΜΒ$ V. 21. ἔσται] bis V; corr. pvc. 27. διπλασία γὰρ ἑκατέρα] deleo.

sit parabola $AB\Gamma$, contingentes autem $A\Delta E$, $EZ\Gamma$, ΔBZ. dico, esse $\Gamma Z : ZE = E\Delta : \Delta A = ZB : B\Delta$.

ducatur enim $A\Gamma$ et in H in duas partes aequales secetur.

iam rectam ab E ad H ductam diametrum esse sectionis, manifestum est [II, 29].

iam si ea per B cadit, ΔZ rectae $A\Gamma$ parallela erit [II, 5] et ad B ab EH in duas partes aequales secabitur [Eucl. VI, 4], qua de causa erit $A\Delta = \Delta E$, $\Gamma Z = ZE$ [I, 35; Eucl. VI, 2], et manifestum est, quod quaerimus.



iam ne cadat per B, sed per Θ, et per Θ rectae $A\Gamma$ parallela ducatur $K\Theta\Lambda$; ea igitur sectionem continget in Θ [I, 32], et propter ea, quae diximus, erit $AK = KE$, $\Lambda\Gamma = \Lambda E$. iam per B rectae EH parallela ducatur $MNB\Xi$, per A, Γ autem rectae ΔZ parallelae AO, $\Gamma\Pi$. quoniam igitur MB, $E\Theta$ parallelae sunt, diametrus est MB [I, 51 coroll.]; et ΔZ in B contingit; itaque AO, $\Gamma\Pi$ ordinate ductae sunt [I def. 4]. et quoniam MB diametrus est, contingens ΓM, ordinate ducta $\Gamma\Pi$, erit $MB = B\Pi$ [I, 35]; quare etiam $MZ = Z\Gamma$ [Eucl. VI, 2]. et quoniam est $MZ = Z\Gamma$, $E\Lambda = \Lambda\Gamma$, erit

$$M\Gamma : \Gamma Z = E\Gamma : \Gamma\Lambda$$

et permutando [Eucl. V, 16] $M\Gamma : \Gamma E = Z\Gamma : \Gamma\Lambda$.

καὶ ἀναστρέψαντι, ὡς ἡ $E\Gamma$ πρὸς EZ, ἡ ΓA πρὸς $A\Xi$· διελόντι, ὡς ἡ ΓZ πρὸς ZE, ἡ $\Gamma\Xi$ πρὸς ΞA. πάλιν ἐπεὶ διάμετρός ἐστιν ἡ MB καὶ ἐφαπτομένη ἡ AN καὶ κατηγμένη ἡ AO, ἴση ἐστὶν ἡ NB τῇ BO καὶ ἡ $N\Delta$ τῇ ΔA. ἔστι δὲ καὶ ἡ EK τῇ KA· ὡς ἄρα ἡ AE πρὸς AK, ἡ NA πρὸς $A\Delta$· ἐναλλάξ, ὡς ἡ EA πρὸς AN, ἡ KA πρὸς $A\Delta$. ἀλλ' ὡς ἡ EA πρὸς AN, ἡ HA πρὸς $A\Xi$· καὶ ὡς ἄρα ἡ KA πρὸς $A\Delta$, ἡ HA πρὸς $A\Xi$. ἔστι δὲ καί, ὡς ἡ ΓA πρὸς AH, ἡ EA πρὸς AK [διπλασία γὰρ ἑκατέρα ἑκατέρας]· δι' ἴσου ἄρα, ὡς ἡ ΓA πρὸς $A\Xi$, ἡ EA πρὸς $A\Delta$· διελόντι, ὡς ἡ $\Gamma\Xi$ πρὸς ΞA, ἡ $E\Delta$ πρὸς ΔA. ἐδείχθη δὲ καί, ὡς ἡ $\Gamma\Xi$ πρὸς $A\Xi$, ἡ ΓZ πρὸς ZE· ὡς ἄρα ἡ ΓZ πρὸς ZE, ἡ $E\Delta$ πρὸς ΔA. πάλιν ἐπεί ἐστιν, ὡς ἡ $\Gamma\Xi$ πρὸς ΞA, ἡ $\Gamma\Pi$ πρὸς AO, καί ἐστιν ἡ μὲν $\Gamma\Pi$ τῆς BZ διπλῆ, ἐπεὶ καὶ ἡ ΓM τῆς MZ, ἡ δὲ AO τῆς $B\Delta$, ἐπεὶ καὶ ἡ AN τῆς $N\Delta$, ὡς ἄρα ἡ $\Gamma\Xi$ πρὸς ΞA, ἡ ZB πρὸς $B\Delta$ καὶ ἡ ΓZ πρὸς ZE καὶ ἡ $E\Delta$ πρὸς ΔA.

μβ'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσι παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἀχθῇ ἐφαπτομένη, ἀποτεμεῖ ἀπ' αὐτῶν εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδους.

ἔστω γάρ τις τῶν προειρημένων τομῶν, ἧς διάμετρος ἡ AB, καὶ ἀπὸ τῶν A, B ἤχθωσαν παρὰ

---

1. $A\Xi$] vc, corr. ex $A\Gamma$ m. 1 V. 10. διπλασία — ἑκατέρας] deleo. 21. ἐν] om. V; corr. p.

uerum $M\Gamma : \Gamma E = \Xi\Gamma : \Gamma H$ [Eucl. VI, 4]; itaque etiam $Z\Gamma : \Gamma A = \Xi\Gamma : \Gamma H$. est autem

$$H\Gamma : \Gamma A = A\Gamma : \Gamma E;$$

nam utraque duplo maior est; ex aequo igitur [Eucl. V, 22] $A\Gamma : \Gamma\Xi = E\Gamma : \Gamma Z$, et conuertendo [Eucl. V, 19 coroll.] $E\Gamma : EZ = \Gamma A : A\Xi$; dirimendo [Eucl. V, 17]

$$\Gamma Z : ZE = \Gamma\Xi : \Xi A.$$

rursus quoniam diametrus est MB, contingens AN, ordinate ducta AO, erit $NB = BO$ [I, 35] et [Eucl. VI, 2] $N\Delta = \Delta A$. est autem etiam $EK = KA$; quare $AE : AK = NA : A\Delta$, et permutando [Eucl. V, 16] $EA : AN = KA : A\Delta$. est autem $EA : AN = HA : A\Xi$ [Eucl. VI, 4]; quare etiam $KA : A\Delta = HA : A\Xi$. est autem etiam $\Gamma A : AH = EA : AK$; nam utraque duplo maior est utraque; itaque ex aequo $\Gamma A : A\Xi = EA : A\Delta$ [Eucl. V, 22]; dirimendo [Eucl. V, 17] $\Gamma\Xi : \Xi A = E\Delta : \Delta A$. demonstrauimus autem etiam, esse $\Gamma\Xi : A\Xi = \Gamma Z : ZE$; itaque $\Gamma Z : ZE = E\Delta : A\Delta$. rursus quoniam est $\Gamma\Xi : \Xi A = \Gamma\Pi : AO$ [Eucl. VI, 4; V, 16], et $\Gamma\Pi = 2BZ$ [Eucl. VI, 4], quoniam etiam $\Gamma M = 2MZ$, et $AO = 2B\Delta$ [Eucl. VI, 4], quoniam etiam $AN = 2N\Delta$, erit

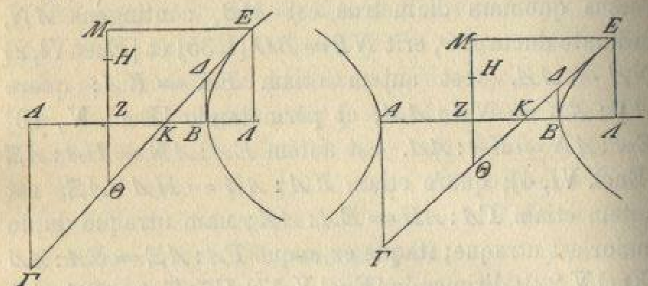
$$\Gamma\Xi : \Xi A = ZB : B\Delta = \Gamma Z : ZE = E\Delta : \Delta A.$$

XLII.

Si in hyperbola uel ellipsi uel circulo uel oppositis a terminis diametri rectae ducuntur rectae ordinate ductae parallelae, alia autem aliqua quoquo modo contingens ducitur, haec ab illis rectas abscindet rectangulum comprehendentes aequale quartae parti figurae eidem diametro adplicatae.

sit enim aliqua sectionum, quas diximus, cuius τεταγμένως κατηγμένην αἱ $ΑΓ$, $ΔΒ$, ἄλλη δέ τις ἐφαπτέσθω κατὰ τὸ $Ε$ ἡ $ΓΕΔ$. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ $ΑΓ$, $ΒΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ $ΑΒ$ εἴδους.

ἔστω γὰρ κέντρον τὸ $Ζ$, καὶ δι' αὐτοῦ ἤχθω παρὰ τὰς $ΑΓ$, $ΒΔ$ ἡ $ΖΗΘ$. ἐπεὶ οὖν αἱ $ΑΓ$, $ΒΔ$ παράλληλοί εἰσιν, ἔστι δὲ καὶ ἡ $ΖΗ$ παράλληλος, συζυγὴς



ἄρα διάμετρός ἐστι τῇ $ΑΒ$· ὥστε τὸ ἀπὸ $ΖΗ$ ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ $ΑΒ$ εἴδους.

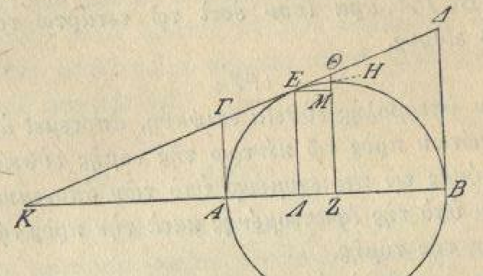
εἰ μὲν οὖν ἡ $ΖΗ$ ἐπὶ τῆς ἐλλείψεως καὶ τοῦ κύκλου διὰ τοῦ $Ε$ ἔρχεται, ἴσαι γίνονται αἱ $ΑΓ$, $ΖΗ$, $ΒΔ$, καὶ φανερὸν αὐτόθεν, ὅτι τὸ ὑπὸ $ΑΓ$, $ΒΔ$ ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ $ΖΗ$, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ $ΑΒ$ εἴδους.

μὴ ἐρχέσθω δή, καὶ συμπιπτέτωσαν αἱ $ΔΓ$, $ΒΑ$ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ $Κ$, καὶ διὰ τοῦ $Ε$ παρὰ μὲν τὴν $ΑΓ$ ἤχθω ἡ $ΕΛ$, παρὰ δὲ τὴν $ΑΒ$ ἡ $ΕΜ$. ἐπεὶ οὖν ἴσον ἐστὶ τὸ ὑπὸ $ΚΖΛ$ τῷ ἀπὸ $ΑΖ$, ἔστιν, ὡς ἡ $ΚΖ$ πρὸς $ΖΑ$, ἡ $ΖΑ$ πρὸς $ΖΛ$, καὶ ἡ $ΚΑ$ πρὸς $ΑΛ$ ἐστιν, ὡς ἡ $ΚΖ$ πρὸς $ΖΑ$, τουτέστι πρὸς $ΖΒ$·

20. ἐστιν] scripsi, ἔστι δέ Vp. $ΖΑ$] pcv, $Δ$ e corr. m. 1 V. $ΖΒ$] pcv; $Β$ e corr. m. 1 V.

diametrus sit $ΑΒ$, et ab $Α$, $Β$ rectae ordinate ductae parallelae ducantur $ΑΓ$, $ΔΒ$, alia autem recta $ΓΕΔ$ in $Ε$ contingat. dico, $ΑΓ \times ΒΔ$ quartae parti figurae ad $ΑΒ$ adplicatae aequale esse.

sit enim centrum $Ζ$, et per id rectis $ΑΓ$, $ΒΔ$ parallela ducatur $ΖΗΘ$. quoniam igitur $ΑΓ$, $ΒΔ$



parallelae sunt, et etiam $ΖΗ$ iis parallela est, diametrus est coniugata cum $ΑΒ$ [I def. 6]; quare $ΖΗ^2$ quartae parti figurae ad $ΑΒ$ adplicatae aequale est [I deff. alt. 3].

iam si in ellipsi circuloque $ΖΗ$ per $Ε$ cadit, erit $ΑΓ = ΖΗ = ΒΔ$, et statim adparet, esse

$$ΑΓ \times ΒΔ = ΖΗ^2,$$

hoc est quartae parti figurae ad $ΑΒ$ adplicatae aequale.

iam per $Ε$ ne cadat, et $ΔΓ$, $ΒΑ$ productae concurrant in $Κ$, per $Ε$ autem rectae $ΑΓ$ parallela ducatur $ΕΛ$ et rectae $ΑΒ$ parallela $ΕΜ$. iam quoniam est [I, 37] $ΚΖ \times ΖΛ = ΑΖ^2$, erit $ΚΖ : ΖΑ = ΖΑ : ΖΛ$ [Eucl. VI, 17] et

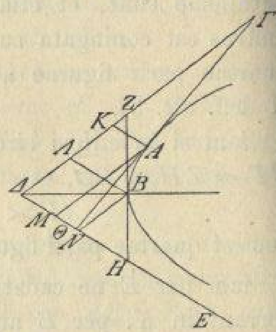
$ΚΑ : ΑΛ = ΚΖ : ΖΑ$ [Eucl. V, 12; — V, 19 coroll.; V, 16] $= ΚΖ : ΖΒ$.

ἀνάπαλιν, ὡς ἡ BZ πρὸς ZK, ἡ ΔA πρὸς AK· συνθέντι ἢ διελόντι, ὡς ἡ BK πρὸς KZ, ἡ AK πρὸς KA. καὶ ὡς ἄρα ἡ ΔB πρὸς $Z\Theta$, ἡ $E\Delta$ πρὸς $\Gamma\Delta$. τὸ ἄρα ὑπὸ ΔB, $\Gamma\Delta$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $Z\Theta$, $E\Delta$, τουτέστι τῷ ὑπὸ ΘZM. τὸ δὲ ὑπὸ ΘZM ἴσον ἐστὶ τῷ ἀπὸ ZH, τουτέστι τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ AB εἴδους· καὶ τὸ ὑπὸ ΔB, $\Gamma\Delta$ ἄρα ἴσον ἐστὶ τῷ τετάρτῳ τοῦ πρὸς τῇ AB εἴδους.

μγ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς εὐθεῖα ἐπιψαύῃ, ἀποτεμεῖ ἀπὸ τῶν ἀσυμπτώτων πρὸς τῷ κέντρῳ τῆς τομῆς εὐθείας ἴσον περιεχούσας τῷ περιεχομένῳ ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων εὐθειῶν ὑπὸ τῆς ἐφαπτομένης κατὰ τὴν πρὸς τῷ ἄξονι κορυφὴν τῆς τομῆς.

ἔστω ὑπερβολὴ ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $\Gamma\Delta E$, ἄξων δὲ ὁ $B\Delta$, καὶ ἤχθω διὰ τοῦ B ἐφαπτομένη ἡ ZBH, ἄλλη δέ τις, ὡς ἔτυχεν, ἐφαπτομένη ἡ $\Gamma A\Theta$. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ $Z\Delta H$ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ $\Gamma\Delta\Theta$.



ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν A, B παρὰ μὲν τὴν ΔH αἱ AK, $B\Lambda$, παρὰ δὲ τὴν $\Gamma\Delta$ αἱ AM, BN. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτεται ἡ $\Gamma A\Theta$, ἴση ἡ ΓA τῇ $A\Theta$· ὥστε ἡ $\Gamma\Theta$ τῆς ΘA διπλῆ καὶ ἡ $\Gamma\Delta$ τῆς AM καὶ ἡ $\Delta\Theta$ τῆς AK. τὸ ἄρα ὑπὸ $\Gamma\Delta\Theta$ τετραπλάσιόν ἐστι τοῦ ὑπὸ KAM. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται

1. ἡ] (pr.) om. V; corr. p. 10. ἀποτεμεῖ] cp, supra add. η m. 1 V. ἀπὸ τῶν] bis V; corr. pc. 16. ἄξων] pcv, ξ e corr. m. 1 V. 17. ZBH] BZH V; corr. p.

e contrario [Eucl. V, 7 coroll.] $BZ : ZK = \Delta A : AK$. componendo [Eucl. V, 18] uel dirimendo [Eucl. V, 17] $BK : KZ = AK : KA$. quare etiam

$$\Delta B : Z\Theta = E\Delta : \Gamma\Delta \text{ [Eucl. VI, 4].}$$

itaque [Eucl. VI, 16] $\Delta B \times \Gamma\Delta = Z\Theta \times E\Delta = \Theta Z \times ZM$ [Eucl. I, 34]. uerum $\Theta Z \times ZM = ZH^2$ [I, 38], hoc est quartae parti figurae ad AB adplicatae aequale. ergo etiam $\Delta B \times \Gamma\Delta$ quartae parti figurae ad AB adplicatae aequale est.

XLIII.

Si recta hyperbolam contingit, ab asymptotis ad centrum sectionis rectas abscindet rectangulum comprehendentes aequale rectangulo comprehenso rectis abscisis a recta in uertice sectionis ad axem posito contingenti.

sit hyperbola AB, asymptotae autem $\Gamma\Delta$, ΔE, axis autem $B\Delta$, et per B contingens ducatur ZBH, alia autem quaeuis contingens $\Gamma A\Theta$. dico, esse

$$Z\Delta \times \Delta H = \Gamma\Delta \times \Delta\Theta.$$

ducantur enim ab A, B rectae ΔH parallelae AK, $B\Lambda$, rectae autem $\Gamma\Delta$ parallelae AM, BN. iam quoniam $\Gamma A\Theta$ contingit, erit $\Gamma A = A\Theta$ [II, 3]. quare erit $\Gamma\Theta = 2\Theta A$, $\Gamma\Delta = 2AM$ [Eucl. VI, 2; I, 34], $\Delta\Theta = 2AK$ [Eucl. VI, 4]. itaque erit

$$\Gamma\Delta \times \Delta\Theta = 4KA \times AM.$$

iam eodem modo demonstrabimus, esse

$$Z\Delta \times \Delta H = 4\Delta B \times BN.$$

est autem $KA \times AM = \Delta B \times BN$ [II, 12]. ergo etiam $\Gamma\Delta \times \Delta\Theta = Z\Delta \times \Delta H$.

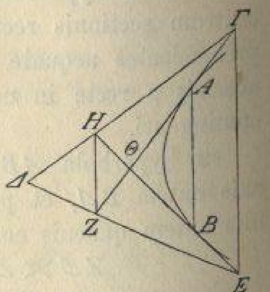
τὸ ὑπὸ $Z\Delta H$ τετραπλάσιον τοῦ ὑπὸ ΔBN. ἴσον δὲ τὸ ὑπὸ KAM τῷ ὑπὸ ΔBN· ἴσον ἄρα καὶ τὸ ὑπὸ $\Gamma\Delta\Theta$ τῷ ὑπὸ $Z\Delta H$.

ὁμοίως δὴ δειχθήσεται, κἂν ἡ ΔB ἑτέρα τις ᾖ διάμετρος καὶ μὴ ἄξων.

μδ'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι ταῖς ἀσυμπτώτοις, αἱ ἐπὶ τὰς τομὰς ἀγόμεναι παράλληλοι ἔσονται τῇ τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσῃ.

ἔστω γὰρ ἡ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι ἡ AB, ἀσύμπτωτοι δὲ αἱ $\Gamma\Delta E$ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ $\Gamma A\Theta Z$, $EB\Theta H$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ AB, ZH, ΓE. λέγω, ὅτι παράλληλοί εἰσιν.



ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ $\Gamma\Delta Z$ ἴσον τῷ ὑπὸ $H\Delta E$, ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ $\Gamma\Delta$ πρὸς ΔE, ἡ $H\Delta$ πρὸς ΔZ· παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ΓE τῇ ZH. καὶ διὰ τοῦτο ὡς ἡ ΘZ πρὸς $Z\Gamma$, ἡ ΘH πρὸς HE. ὡς δὲ ἡ HE πρὸς HB, ἡ ΓZ πρὸς AZ· διπλῆ γὰρ ἑκατέρα· δι' ἴσου ἄρα ὡς ἡ ΘH πρὸς HB, ἡ ΘZ πρὸς ZA. παράλληλος ἄρα ἐστὶν ἡ ZH τῇ AB.

με'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρου τοῦ ἄξονος ἀχθῶσιν

ἔστιν

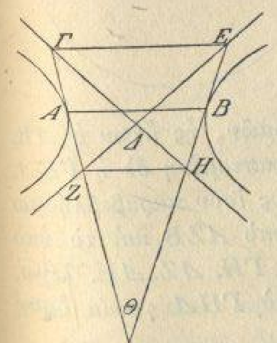
13. AB] AH V; corr. p. 17. τῷ] τό V; corr. pc. — 18. $\Gamma\Delta$] om. V; corr. p.

iam eodem modo hoc demonstrabimus, etiam si ΔB alia aliqua diametrus est, non axis.

XLIV.

Si duae rectae hyperbolam uel oppositas contingentes cum asymptotis concurrunt, rectae ad puncta sectionis ductae parallelae erunt rectae puncta contactus coniungenti.

sit enim AB aut hyperbola aut oppositae, asymptotae autem $\Gamma\Delta$, ΔE contingentesque $\Gamma A\Theta Z$, $EB\Theta H$, et ducantur AB, ZH, ΓE. dico, eas parallelas esse.



nam quoniam est

$$\Gamma\Delta \times \Delta Z = H\Delta \times \Delta E$$

[prop. XLIII; cfr. Eutocius], erit [Eucl. VI, 16]

$$\Gamma\Delta : \Delta E = H\Delta : \Delta Z;$$

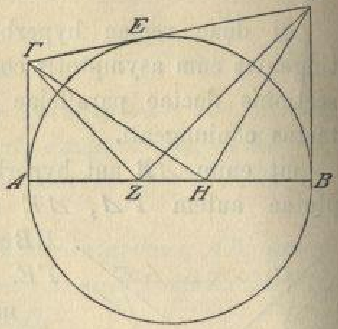
itaque [Eucl. VI, 6; I, 27, 28] ΓE et ZH parallelae sunt. qua de causa erit

$$\Theta Z : Z\Gamma = \Theta H : HE$$ [Eucl. VI, 2].

est autem $HE : HB = \Gamma Z : AZ$; nam utraque duplo maior est utraque [II, 3]. ex aequo igitur [Eucl V, 22] $\Theta H : HB = \Theta Z : ZA$. ergo [Eucl. VI, 2] ZH, AB parallelae sunt.

XLV.

Si in hyperbola uel ellipsi uel circulo uel oppositis a terminis axis rectae perpendiculares ducuntur, et quartae parti figurae aequale axi adplicatur in utramque partem spatium in hyperbola oppositisque figura εὐθεῖαι πρὸς ὀρθάς, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παρὰ τὸν ἄξονα παραβληθῇ ἐφ' ἑκάτερα ἐπὶ μὲν τῆς ὑπερβολῆς καὶ τῶν ἀντικειμένων ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, ἐπὶ δὲ τῆς ἐλλείψεως ἐλλεῖπον, ἀχθῇ δέ τις εὐθεῖα ἐφαπτομένη τῆς τομῆς συμπίπτουσα ταῖς πρὸς ὀρθὰς εὐθείαις, αἱ ἀπὸ τῶν συμπτώσεων ἀγόμεναι εὐθεῖαι ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γενηθέντα σημεῖα ὀρθὰς ποιοῦσι γωνίας πρὸς τοῖς εἰρημένοις σημείοις.

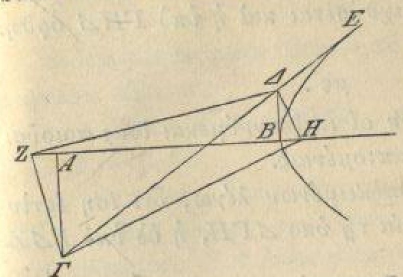


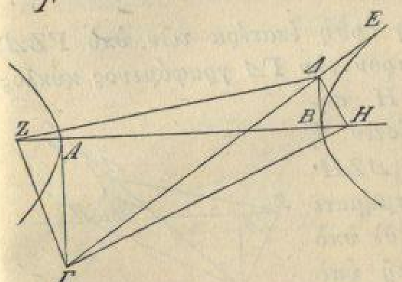
ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν, ἧς ἄξων ὁ ΑΒ, πρὸς ὀρθὰς δὲ αἱ ΑΓ, ΒΔ, ἐφαπτομένη δὲ ἡ ΓΕΔ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον παραβεβλήσθω ἐφ' ἑκάτερα, ὡς εἴρηται, τὸ ὑπὸ ΑΖΒ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΗΒ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓΖ, ΓΗ, ΔΖ, ΔΗ. λέγω, ὅτι ἥ τε ὑπὸ ΓΖΔ καὶ η ὑπὸ ΓΗΔ γωνία ὀρθή ἐστιν.

ἐπεὶ γὰρ τὸ ὑπὸ ΑΓ, ΒΔ ἴσον ἐδείχθη τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ πρὸς τῇ ΑΒ εἴδους, ἔστι δὲ καὶ τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους, τὸ ἄρα ὑπὸ ΑΓ, ΔΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΖΒ. ἔστιν ἄρα, ὡς ἡ ΓΑ πρὸς ΑΖ, ἡ ΖΒ πρὸς ΒΔ. καὶ ὀρθαὶ αἱ πρὸς τοῖς Α, Β σημείοις γωνίαι· ἴση ἄρα ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΖΔ, ἡ δὲ ὑπὸ ΑΖΓ τῇ ὑπὸ ΖΔΒ. καὶ ἐπεὶ ἡ ὑπὸ ΓΑΖ ὀρθή ἐστιν, αἱ ἄρα ὑπὸ ΑΓΖ,

20. ΓΖΔ] p; ΓΔΖ vc, ΓΔ″Ζ′ V (lineolae a manu 2?). 27. ὑπό] pc, supra scr. m. 1 V.

quadrata excedens, in ellipsi autem deficiens, sectionemque contingens recta ducitur cum rectis perpendicularibus concurrens, rectae a punctis concursus ad puncta adplicatione orta ductae ad puncta, quae diximus, rectos angulos efficiunt.





sit aliqua sectionum, quas diximus, cuius axis sit AB, perpendiculares autem $A\Gamma$, $B\Delta$ contingensque $\Gamma E\Delta$, et quartae parti figurae aequale in utramque partem adplicetur ita, ut diximus, $AZ \times ZB$ et $AH \times HB$, ducanturque ΓZ, ΓH, ΔZ, ΔH. dico, angulos $\Gamma Z\Delta$ et $\Gamma H\Delta$ rectos esse.

nam quoniam demonstrauimus, esse $A\Gamma \times B\Delta$ quartae parti figurae ad AB adplicatae aequale [prop. XLII], uerum etiam $AZ \times ZB$ quartae parti figurae aequale est, erit $A\Gamma \times \Delta B = AZ \times ZB$. itaque $\Gamma A : AZ = ZB : B\Delta$ [Eucl. VI, 16]. et anguli ad A, B positi recti sunt; itaque [Eucl. VI, 6] $\angle A\Gamma Z = BZ\Delta$, $\angle AZ\Gamma = Z\Delta B$. et quoniam $\angle \Gamma AZ$ rectus est, $\angle A\Gamma Z + AZ\Gamma$ uni recto aequales sunt [Eucl. I, 32]. et demonstrauimus etiam, esse

$$\angle A\Gamma Z = \Delta ZB;$$

itaque $\angle \Gamma Z\Delta + \Delta ZB$ uni recto aequales erunt. ergo

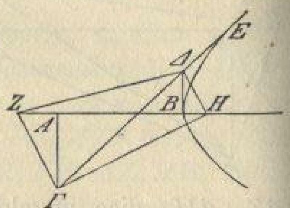
ΔΖΓ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσίν. ἐδείχθη δὲ καὶ ἡ ὑπὸ ΑΓΖ ἴση τῇ ὑπὸ ΔΖΒ· αἱ ἄρα ὑπὸ ΓΖΔ, ΔΖΒ μιᾷ ὀρθῇ ἴσαι εἰσί. λοιπὴ ἄρα ἡ ὑπὸ ΔΖΓ ὀρθή ἐστιν. ὁμοίως δὴ δειχθήσεται καὶ ἡ ὑπὸ ΓΗΔ ὀρθή.

μϛ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων αἱ ἐπιζευγνύμεναι ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς ταῖς ἐφαπτομέναις.

τῶν γὰρ αὐτῶν ὑποκειμένων λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ μὲν ὑπὸ ΑΓΖ γωνία τῇ ὑπο ΔΓΗ, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.

ἐπεὶ γὰρ ἐδείχθη ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ὑπὸ ΓΖΔ, ΓΗΔ, ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΓΔ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν Ζ, Η σημείων· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΔΓΗ τῇ ὑπὸ ΔΖΗ· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι τοῦ κύκλου εἰσίν. ἡ δὲ ὑπὸ ΔΖΗ ἐδείχθη ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ· ὥστε ἡ ὑπὸ ΔΓΗ ἴση τῇ ὑπὸ ΑΓΖ. ὁμοίως δὲ καὶ ἡ ὑπο ΓΔΖ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ.



μζ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἡ ἀπὸ τῆς συμπτώσεως τῶν ἐπιζευχθεισῶν ἐπὶ τὴν ἁφὴν ἀγομένη πρὸς ὀρθὰς ἔσται τῇ ἐφαπτομένῃ.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον, καὶ συμπιπτέτωσαν ἀλλήλαις αἱ μὲν ΓΗ, ΖΔ κατὰ τὸ Θ, αἱ

4. ΓΗΔ] p, ΓΔ''Η' V (lineolae a m. 2?), ΓΔΗ vc. 9. ΓΔΖ] cp, ΓΔΞ V. 19. ΔΓΗ] ΔΓΖ V; corr. p.

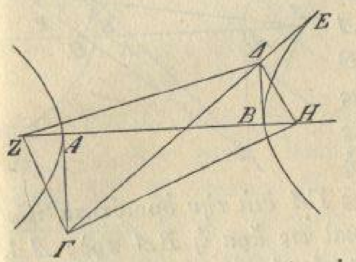
reliquus angulus ΔΖΓ rectus est [Eucl. I, 13]. iam eodem modo demonstrabimus, etiam ∟ ΓΗΔ rectum esse.

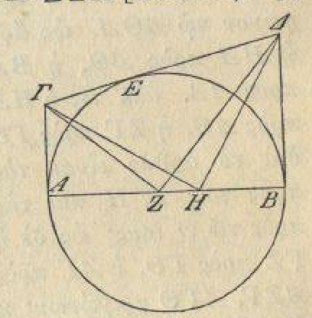
XLVI.

Iisdem positis rectae ductae ad contingentes angulos aequales efficiunt.

nam iisdem suppositis dico, esse ∟ ΑΓΖ = ΔΓΗ, ∟ ΓΔΖ = ΒΔΗ.

quoniam enim demonstrauimus, utrumque angulum ΓΖΔ, ΓΗΔ rectum esse [prop. XLV], circulus circum diametrum ΓΔ descriptus per puncta Z, H ueniet [Eucl. III, 31]; itaque ∟ ΔΓΗ = ΔΖΗ [Eucl. III, 21];





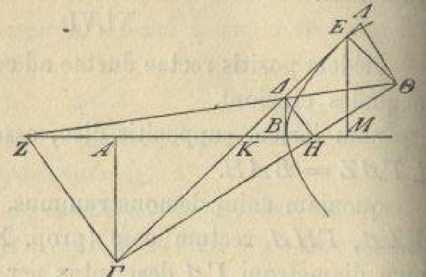
nam in eodem segmento circuli positi sunt. demonstrauimus autem, esse ∟ ΔΖΗ = ΑΓΖ [prop. XLV]; quare etiam ∟ ΔΓΗ = ΑΓΖ. et eodem modo demonstrabimus, esse etiam ∟ ΓΔΖ = ΒΔΗ.

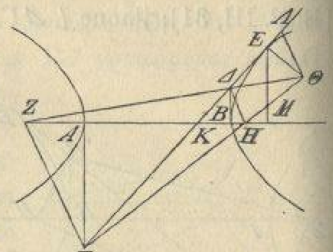
XLVII.

Iisdem positis recta a puncto concursus rectarum ductarum ad punctum contactus ducta ad contingentem perpendicularis erit.

supponantur enim eadem, quae antea, et ΓΗ, ΖΔ δὲ $ΓΔ$, $ΒΑ$ ἐκβαλλόμεναι κατὰ τὸ $Κ$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $ΕΘ$. λέγω, ὅτι κάθετός ἐστιν ἡ $ΕΘ$ ἐπὶ τὴν $ΓΔ$.

εἰ γὰρ μή, ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Θ$ ἐπὶ τὴν $ΓΔ$ κάθετος ἡ $ΘΛ$. ἐπεὶ οὖν ἴση ἡ ὑπὸ $ΓΔΖ$ τῇ ὑπὸ $ΗΔΒ$, ἔστι δὲ καὶ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΔΒΗ$ ὀρθῇ τῇ ὑπὸ $ΔΛΘ$ ἴση, ὅμοιον ἄρα τὸ $ΔΗΒ$ τρίγωνον τῷ $ΛΘΔ$. ὡς ἄρα ἡ $ΗΔ$ πρὸς $ΔΘ$, ἡ $ΒΔ$ πρὸς $ΔΛ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΗΔ$ πρὸς $ΔΘ$, ἡ $ΖΓ$ πρὸς $ΓΘ$ διὰ τὸ ὀρθὰς εἶναι τὰς πρὸς τοῖς $Ζ$, $Η$ καὶ τὰς πρὸς τῷ $Θ$ ἴσας· ὡς δὲ ἡ $ΓΖ$ πρὸς $ΓΘ$, ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΛ$ διὰ τὴν ὁμοιότητα τῶν $ΑΖΓ$, $ΛΓΘ$ τριγώνων· καὶ ως ἄρα ἡ $ΒΔ$ πρὸς $ΔΛ$, ἡ $ΑΓ$ πρὸς $ΓΛ$. ἐναλλάξ, ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς $ΓΑ$, ἡ $ΔΛ$ πρὸς $ΛΓ$. ἀλλ' ὡς ἡ $ΔΒ$ πρὸς $ΓΑ$, ἡ $ΒΚ$ πρὸς $ΚΑ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΔΛ$ πρὸς $ΓΛ$, ἡ $ΒΚ$ πρὸς $ΚΑ$. ἤχθω ἀπὸ τοῦ $Ε$ παρὰ τὴν $ΑΓ$ ἡ $ΕΜ$· τεταγμένως ἄρα ἔσται κατηγμένη ἐπὶ τὴν $ΑΒ$· καὶ ἔσται, ὡς ἡ $ΒΚ$ πρὸς $ΚΑ$, ἡ $ΒΜ$ πρὸς $ΜΑ$. ὡς δὲ ἡ $ΒΜ$ πρὸς $ΜΑ$, ἡ $ΔΕ$ πρὸς $ΕΓ$· καὶ ὡς ἄρα ἡ $ΔΛ$ πρὸς $ΛΓ$, ἡ $ΔΕ$

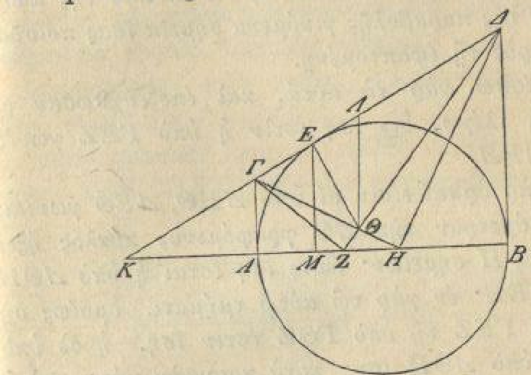




7. ἴση ἐστὶν ἡ cp. $ΓΔΖ$] pvc, in V littera Z mire deformata. 10. $ΔΒΗ$] $ΒΔ''Η'$ V (lineolae a m. 2); corr. p. 12. τό] τὸ ὑπό V; corr. p.

inter se concurrant in $Θ$, $ΓΔ$ autem et BA productae in K, ducaturque $EΘ$. dico, esse $EΘ$ ad $ΓΔ$ perpendicularem.

nam si minus, a $Θ$ ad $ΓΔ$ perpendicularis ducatur $ΘΛ$. quoniam igitur $\angle ΓΔZ = HΔB$ [prop. XLVI],



et $\angle ΔBH = ΔΛΘ$ (nam recti sunt), trianguli $ΔHB$, $ΛΘΔ$ similes sunt. itaque $HΔ : ΔΘ = BΔ : ΔΛ$ [Eucl. VI, 4]. uerum $HΔ : ΔΘ = ZΓ : ΓΘ$ [ibid.], quia anguli ad Z, H positi recti sunt [prop. XLV] et anguli ad $Θ$ positi aequales; et [Eucl. VI, 4] $ΓZ : ΓΘ = AΓ : ΓΛ$ propter similitudinem triangulorum $AZΓ$, $ΛΓΘ$ [prop. XLVI]; quare etiam

$$BΔ : ΔΛ = AΓ : ΓΛ.$$

permutando [Eucl. V, 16] $ΔB : ΓA = ΔΛ : ΛΓ$. uerum $ΔB : ΓA = BK : KA$ [Eucl. VI, 4]; quare etiam $ΔΛ : ΓΛ = BK : KA$. ducatur ab E rectae $AΓ$ parallela EM; ea igitur ad AB odinate ducta erit [I def. 4]; et erit $BK : KA = BM : MA$ [I, 36]. est autem $BM : MA = ΔE : EΓ$ [Eucl. VI, 2]; ita-πρὸς $ΕΓ$· ὅπερ ἄτοπον. οὐκ ἄρα ἡ $ΘΔ$ κάθετός ἐστιν, οὐδὲ ἄλλη τις πλὴν τῆς $ΘΕ$.

μη'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων δεικτέον, ὅτι αἱ ἀπὸ τῆς ἁφῆς ἐπὶ τὰ ἐκ τῆς παραβολῆς γινόμενα σημεῖα ἴσας ποιοῦσι γωνίας πρὸς τῇ ἐφαπτομένῃ.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΕΖ$, $ΕΗ$. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ $ΓΕΖ$ γωνίᾳ τῇ ὑπὸ $ΗΕΔ$.

ἐπεὶ γὰρ ὀρθαί εἰσιν αἱ ὑπὸ $ΔΗΘ$, $ΔΕΘ$ γωνίαι, ὁ περὶ διάμετρον τὴν $ΔΘ$ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τῶν $Ε$, $Η$ σημείων· ὥστε ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ $ΔΘΗ$ τῇ ὑπὸ $ΔΕΗ$· ἐν γὰρ τῷ αὐτῷ τμήματι. ὁμοίως δὴ καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΕΖ$ τῇ ὑπὸ $ΓΘΖ$ ἐστιν ἴση. ἡ δὲ ὑπὸ $ΓΘΖ$ τῇ ὑπὸ $ΔΘΗ$ ἴση· κατὰ κορυφὴν γάρ· καὶ ἡ ὑπὸ $ΓΕΖ$ ἄρα τῇ ὑπὸ $ΔΕΗ$ ἐστιν ἴση.

μθ'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπό τινος τῶν σημείων κάθετος ἀχθῇ ἐπὶ τὴν ἐφαπτομένην, αἱ ἀπὸ τοῦ γενομένου σημείου ἐπὶ τὰ πέρατα τοῦ ἄξονος ὀρθὴν ποιοῦσι γωνίαν.

ὑποκείσθω γὰρ τὰ αὐτά, καὶ ἀπὸ τοῦ $Η$ ἐπὶ τὴν $ΓΔ$ κάθετος ἤχθω ἡ $ΗΘ$, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ $ΑΘ$, $ΒΘ$. λέγω, ὅτι ἡ ὑπὸ $ΑΘΒ$ γωνία ὀρθή ἐστιν.

ἐπεὶ γὰρ ὀρθὴ ἡ ὑπὸ $ΔΒΗ$ καὶ ἡ ὑπὸ $ΔΘΗ$, ὁ περὶ διάμετρον τὴν $ΔΗ$ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ

4. αἱ] om. V; corr. p. 19. γενομένου] γινομένου Halley. 24. $ΑΘΒ$] $ΑΒΘ$ V; corr. p.

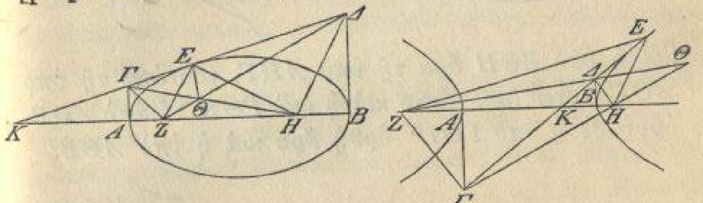
que etiam $ΔΑ : ΔΓ = ΔΕ : ΕΓ$; quod absurdum est. ergo $ΘΔ$ perpendicularis non est nec ulla alia praeter $ΘΕ$.

XLVIII.

Iisdem positis demonstrandum, rectas a puncto contactus ad puncta adplicatione orta ductas ad contingentem angulos aequales efficere.

supponantur enim eadem, ducanturque EZ, EH. dico, esse $\angle ΓEZ = HEΔ$.

nam quoniam anguli $ΔHΘ$, $ΔEΘ$ recti sunt [prop. XLV, XLVII], circulus circum diametrum $ΔΘ$



descriptus per puncta E, H ueniet [Eucl. III, 31]; quare $\angle ΔΘH = ΔEH$ [Eucl. III, 21]; nam in eodem segmento positi sunt. eadem de causa etiam

$$\angle ΓEZ = ΓΘZ.$$

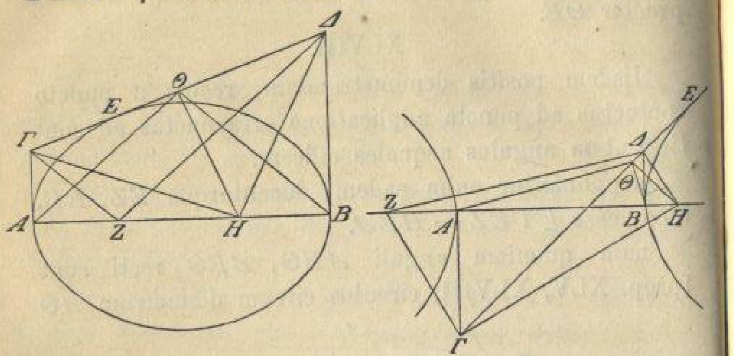
est autem $\angle ΓΘZ = ΔΘH$ [Eucl. I, 15]; nam ad uerticem positi sunt. ergo etiam $\angle ΓEZ = ΔEH$.

XLIX.

Iisdem positis si ab aliquo punctorum perpendicularis ad contingentem ducitur, rectae a puncto ita orto ad terminos axis ductae rectum angulum efficiunt.

supponantur enim eadem, et ab H ad $ΓΔ$ perpendicularis ducatur $HΘ$, ducanturque $AΘ$, $BΘ$. dico, angulum $AΘB$ rectum esse.

τῶν Θ, Β, καὶ ἴση ἔσται ἡ ὑπὸ ΗΘΒ γωνία τῇ ὑπὸ ΒΔΗ. ἡ δὲ ὑπὸ ΑΗΓ τῇ ὑπὸ ΒΔΗ ἐδείχθη ἴση·



καὶ ἡ ὑπὸ ΒΘΗ ἄρα τῇ ὑπὸ ΑΗΓ, τουτέστι τῇ ὑπὸ ΑΘΓ, ἐστιν ἴση. ὥστε καὶ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ τῇ ὑπὸ ΑΘΒ. ὀρθὴ δὲ ἡ ὑπὸ ΓΘΗ· ὀρθὴ ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΑΘΒ.

ν'.

Τῶν αὐτῶν ὄντων ἐὰν ἀπὸ τοῦ κέντρου τῆς τομῆς προσπέσῃ τις τῇ ἐφαπτομένῃ παράλληλος τῇ διὰ τῆς ἁφῆς καὶ ἑνὸς τῶν σημείων ἠγμένῃ εὐθείᾳ, ἴση ἔσται τῇ ἡμισείᾳ τοῦ ἄξονος.

ἔστω γὰρ τὰ αὐτὰ τοῖς πρότερον καὶ κέντρον τὸ Θ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΕΖ, καὶ αἱ ΔΓ, ΒΑ συμπιπτέτωσαν κατὰ τὸ Κ, καὶ διὰ τοῦ Θ παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΘΛ. λέγω, ὅτι ἴση ἐστὶν ἡ ΘΛ τῇ ΘΒ.

ἐπεζεύχθωσαν γὰρ αἱ ΕΗ, ΑΛ, ΛΗ, ΛΒ, καὶ διὰ τοῦ Η παρὰ τὴν ΕΖ ἤχθω ἡ ΗΜ. ἐπεὶ οὖν τὸ ὑπὸ ΑΖΒ ἴσον ἐστὶ τῷ ὑπὸ ΑΗΒ, ἴση ἄρα ἡ ΑΖ τῇ ΗΒ. ἔστι δὲ καὶ ἡ ΑΘ τῇ ΘΒ ἴση· καὶ ἡ ΖΘ ἄρα τῇ ΘΗ

3. ΑΗΓ] ΗΓ V; corr. p.

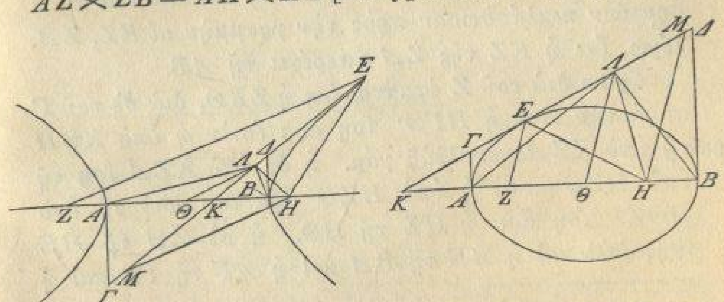
nam quoniam $\angle \Delta BH$, $\Delta\Theta H$ recti sunt, circulus circum diametrum ΔH descriptus per Θ, B ueniet [Eucl. III, 31], et $\angle H\Theta B = B\Delta H$ [Eucl. III, 21]. demonstrauimus autem, esse $\angle AH\Gamma = B\Delta H$ [prop. XLV]; quare etiam $\angle B\Theta H = AH\Gamma = A\Theta\Gamma$ [Eucl. III, 31, 21]. itaque etiam $\angle \Gamma\Theta H = A\Theta B$. uerum $\angle \Gamma\Theta H$ rectus est; ergo etiam $\angle A\Theta B$ rectus est.

L.

Iisdem positis si a centro sectionis ad contingentem recta ducitur parallela rectae per punctum contactus alterumque punctorum ductae, dimidio axi aequalis erit.

sint enim eadem, quae antea, et centrum sit Θ, ducaturque EZ, et $\Delta\Gamma$, BA in K concurrant, per Θ autem rectae EZ parallela ducatur $\Theta\Lambda$. dico, esse $\Theta\Lambda = \Theta B$.

ducantur enim EH, $A\Lambda$, ΛH, ΛB, et per H rectae EZ parallela ducatur HM. quoniam igitur est $AZ \times ZB = AH \times HB$ [ex hypothesi; cfr. prop XLV],



erit $AZ = HB$. uerum etiam $A\Theta = \Theta B$; quare etiam $Z\Theta = \Theta H$. itaque etiam $E\Lambda = \Lambda M$ [Eucl. VI, 2].

ἴση. ὥστε καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΜ ἴση. καὶ ἐπεὶ ἐδείχθη ἡ ὑπὸ ΓΕΖ γωνία τῇ ὑπο ΔΕΗ ἴση, ἡ δὲ ὑπὸ ΓΕΖ ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΕΜΗ, ἴση ἄρα καὶ ἡ ὑπὸ ΕΜΗ τῇ ὑπὶ ΜΕΗ. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΕΗ τῇ ΗΜ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΕΔ τῇ ΔΜ ἐδείχθη ἴση· κάθετος ἄρα η ΗΔ ἐπὶ τὴν ΕΜ. ὥστε διὰ τὸ προδειχθὲν ὀρθή ἐστιν ἡ ὑπὸ ΑΔΒ, καὶ ὁ περὶ διάμετρον τὴν ΑΒ γραφόμενος κύκλος ἥξει διὰ τοῦ Δ. καί ἐστιν ἴση ἡ ΘΑ τῇ ΘΒ· καὶ ἡ ΘΔ ἄρα ἐκ τοῦ κέντρου οὖσα τοῦ ἡμικυκλίου ἴση ἐστὶ τῇ ΘΒ.

να'.

Ἐὰν ὑπερβολῆς ἢ τῶν ἀντικειμένων παρὰ τὸν ἄξονα ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ὑπερβάλλον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς ὁποτερανοῦν τῶν τομῶν, ἡ μείζων τῆς ἐλάσσονος ὑπερέχει τῷ ἄξονι.

ἔστω γὰρ ὑπερβολὴ ἢ ἀντικείμεναι, ὧν ἄξων ὁ ΑΒ, κέντρον δὲ τὸ Γ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἔστω ἑκάτερον τῶν ὑπὸ ΑΔΒ, ΑΕΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Ε, Δ σημείων κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΕΖ, ΖΔ. λέγω, ὅτι ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

ἤχθω διὰ τοῦ Ζ ἐφαπτομένη ἡ ΖΚΘ, διὰ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν ΖΔ ἡ ΗΓΘ· ἴση ἄρα ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΚΘΗ τῇ ὑπὸ ΚΖΔ· ἐναλλὰξ γάρ. ἡ δὲ ὑπὸ ΚΖΔ ἴση τῇ ὑπὸ ΗΖΘ· καὶ ἡ ὑπὸ ΗΖΘ ἄρα ἴση ἐστὶ τῇ ὑπὸ ΗΘΖ. ἴση ἄρα ἡ ΗΖ τῇ ΗΘ. ἡ δὲ ΖΗ τῇ ΗΕ ἴση, ἐπεὶ καὶ ἡ ΑΕ τῇ ΒΔ καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΓΒ καὶ ἡ

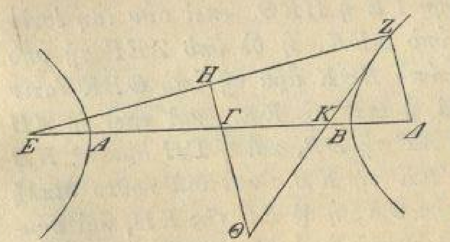
3. ΕΜΗ] (pr.) ΕΗΜ V; corr. p. Γ] pcv; corr. ex Κ m. 1 V. 23. ΖΚΘ] ΖΘΚ V; corr. p. 27. ΗΘ — 28. καί (alt.)] bis V; corr. p.

et quoniam demonstrauimus [prop. XLVIII], esse $\angle \Gamma EZ = \Delta EH$, et est [Eucl. I, 29] $\angle \Gamma EZ = EMH$, erit etiam $\angle EMH = MEH$. itaque etiam $EH = HM$ [Eucl. I, 6]. demonstrauimus autem, esse etiam $E\Delta = \Delta M$; itaque $H\Delta$ ad EM perpendicularis est [Eucl. I, 8]. quare propter id, quod antea demonstrauimus [prop. XLIX], $\angle A\Delta B$ rectus est, et [Eucl. III, 31] circulus circum diametrum AB descriptus per Δ ueniet. et $\Theta A = \Theta B$; ergo etiam radius semicirculi $\Theta\Delta = \Theta B$.

LI.

Si axi hyperbolae uel oppositarum ad utramque partem adplicatur spatium quartae parti figurae aequale figura quadrata excedens, et a punctis adplicatione ortis ad utramuis sectionum franguntur rectae, maior minorem excedit axe.

sit enim hyperbola uel oppositae, quarum axis sit AB, centrum autem Γ, quartaeque parti figurae aequalia sint



$A\Delta \times \Delta B$, $AE \times EB$, et a punctis E, Δ ad lineam frangantur $EZ, Z\Delta$. dico, esse $EZ = Z\Delta + AB$.

nam per Z contingens ducatur $ZK\Theta$, per Γ autem rectae $Z\Delta$ parallela $H\Gamma\Theta$; itaque [Eucl. I, 29] $\angle K\Theta H = KZ\Delta$; nam alterni sunt. uerum [prop. XLVIII] $\angle KZ\Delta = HZ\Theta$; quare etiam $\angle HZ\Theta = H\Theta Z$. ita-

ΕΓ τῇ ΓΔ· καὶ ἡ ΗΘ ἄρα τῇ ΕΗ ἐστιν ἴση. ὥστε ἡ ΖΕ τῆς ΗΘ ἐστι διπλῆ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΓΘ ἴση δέδεικται τῇ ΓΒ, η ΕΖ ἄρα διπλῆ ἐστι συναμφοτέρου τῆς ΗΓΒ. ἀλλὰ τῆς μὲν ΗΓ διπλῆ ἡ ΖΔ, τῆς δὲ ΓΒ διπλῆ ἡ ΑΒ· ἡ ΕΖ ἄρα ἴση ἐστὶ συναμφοτέρῳ τῇ ΖΔ, ΑΒ. ὥστε ἡ ΕΖ τῆς ΖΔ ὑπερέχει τῇ ΑΒ.

νβ'.

Ἐὰν ἐν ἐλλείψει παρὰ τὸν μείζονα τῶν ἀξόνων τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἴσον ἐφ' ἑκάτερα παραβληθῇ ἐλλεῖπον εἴδει τετραγώνῳ, καὶ ἀπὸ τῶν γενομένων ἐκ τῆς παραβολῆς σημείων κλασθῶσιν εὐθεῖαι πρὸς τὴν γραμμήν, ἴσαι ἔσονται τῷ ἄξονι.

ἔστω ἔλλειψις, ἧς μείζων τῶν ἀξόνων ὁ ΑΒ, καὶ τῷ τετάρτῳ μέρει τοῦ εἴδους ἑκάτερον ἴσον ἔστω τῶν ὑπὸ ΑΓΒ, ΑΔΒ, καὶ ἀπὸ τῶν Γ, Δ κεκλάσθωσαν πρὸς τὴν γραμμὴν αἱ ΓΕΔ. λέγω, ὅτι αἱ ΓΕΔ ἴσαι εἰσὶ τῇ ΑΒ.

ἤχθω ἐφαπτομένη ἡ ΖΕΘ, καὶ κέντρον τὸ Η, καὶ δι' αὐτοῦ παρὰ τὴν ΓΕ ἡ ΗΚΘ. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ ὑπὸ ΓΕΖ τῇ ὑπὸ ΘΕΚ, ἡ δὲ ὑπὸ ΖΕΓ τῇ ὑπὸ ΕΘΚ ἴση, καὶ ἡ ὑπὸ ΕΘΚ ἄρα τῇ ὑπὸ ΘΕΚ ἐστιν ἴση. ἴση ἄρα καὶ ἡ ΘΚ τῇ ΚΕ. καὶ ἐπεὶ ἡ ΑΗ τῇ ΗΒ ἴση καὶ ἡ ΑΓ τῇ ΔΒ, καὶ ἡ ΓΗ ἄρα τῇ ΗΔ ἴση· ὥστε καὶ ἡ ΕΚ τῇ ΚΔ. καὶ διὰ τοῦτο διπλῆ ἐστιν ἡ μὲν ΕΔ τῆς ΘΚ, ἡ δὲ ΕΓ τῆς ΚΗ, καὶ συναμφότερος ἡ ΓΕΔ διπλῆ ἐστι τῆς ΗΘ. ἀλλὰ καὶ ἡ ΑΒ διπλῆ τῆς ΗΘ· ἴση ἄρα ἡ ΑΒ ταῖς ΓΕΔ.

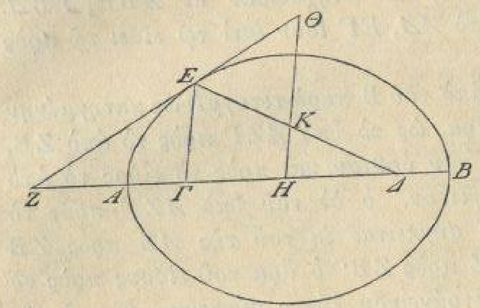
---

8. ἐν] om. V; corr. p. 10. λεῖπον V (initio paginae); corr. p. 18. ΖΕΘ] ΕΖΘ V; corr. p. 19. ΗΚΘ] ΗΘΚ V; corr. p.

que [Eucl. I, 6] $HZ = H\Theta$. est autem $ZH = HE$ [Eucl. VI, 2], quoniam $AE = B\Delta$, $A\Gamma = \Gamma B$, $E\Gamma = \Gamma\Delta$. itaque etiam $H\Theta = EH$; quare $ZE = 2H\Theta$. et quoniam demonstrauimus, esse $\Gamma\Theta = \Gamma B$ [prop. L], erit $EZ = 2(H\Gamma + \Gamma B)$. uerum $Z\Delta = 2H\Gamma$ [Eucl. VI, 4] et $AB = 2\Gamma B$. ergo $EZ = Z\Delta + AB$.

LII.

Si in ellipsi maiori axi ad utramque partem adplicatur spatium quartae parti figurae aequale figura quadrata deficiens, et a punctis adplicatione ortis ad lineam franguntur rectae, eae axi aequales erunt.



sit ellipsis, cuius axis maior sit AB, et quartae parti figurae aequalia sint $A\Gamma \times \Gamma B$, $A\Delta \times \Delta B$, et a Γ, Δ ad lineam frangantur ΓE, $E\Delta$. dico, esse $\Gamma E + E\Delta = AB$.

ducatur contingens $ZE\Theta$, centrum autem sit H, et per id rectae ΓE parallela ducatur $HK\Theta$. iam quoniam $\angle \Gamma EZ = \Theta EK$ [prop. XLVIII], et [Eucl. I, 29] $\angle ZE\Gamma = E\Theta K$, erit etiam $\angle E\Theta K = \Theta EK$. quare etiam $\Theta K = KE$ [Eucl. I, 6]. et quoniam $AH = HB$ et $A\Gamma = \Delta B$, erit etiam $\Gamma H = H\Delta$; quare etiam $EK = K\Delta$ [Eucl. VI, 2]. ideo $E\Delta = 2\Theta K$, $E\Gamma = 2KH$ [Eucl. VI, 4], νγ'.

Ἐὰν ἐν ὑπερβολῇ ἢ ἐλλείψει ἢ κύκλου περιφερείᾳ ἢ ταῖς ἀντικειμέναις ἀπ' ἄκρας τῆς διαμέτρου ἀχθῶσιν παρὰ τεταγμένως κατηγμένην, καὶ ἀπὸ τῶν αὐτῶν περάτων πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς ἀχθεῖσαι εὐθεῖαι τέμνωσι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων ἴσον ἐστὶ τῷ πρὸς τῇ αὐτῇ διαμέτρῳ εἴδει.

ἔστω μία τῶν εἰρημένων τομῶν ἡ *ΑΒΓ*, ἧς διάμετρος ἡ *ΑΓ*, καὶ παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἤχθωσαν αἱ *ΑΔ*, *ΓΕ*, καὶ διήχθωσαν αἱ *ΑΒΕ*, *ΓΒΔ*. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ *ΑΔ*, *ΕΓ* ἴσον ἐστὶ τῷ εἴδει τῷ πρὸς τῇ *ΑΓ*.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ τοῦ *Β* παρὰ τεταγμένως κατηγμένην ἡ *ΒΖ*. ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ *ΑΖΓ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΖΒ*, ἡ πλαγία πρὸς τὴν ὀρθίαν καὶ πρὸς τὸ εἶδος τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* τετράγωνον. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ *ΑΖΓ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΒΖ* λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς *ΑΖ* πρὸς *ΖΒ* καὶ τοῦ τῆς *ΓΖ* πρὸς *ΖΒ*· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς *ΖΒ* πρὸς *ΖΑ* καὶ τοῦ τῆς *ΒΖ* πρὸς *ΓΖ*. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ *ΑΖ* πρὸς *ΖΒ*, ἡ *ΑΓ* πρὸς *ΓΕ*, ὡς δὲ ἡ *ΓΖ* πρὸς *ΖΒ*, ἡ *ΓΑ* πρὸς *ΑΔ*· ὁ ἄρα τοῦ εἴδους πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς *ΑΓ* τετράγωνον λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς *ΓΕ* πρὸς *ΓΑ* καὶ τοῦ τῆς *ΑΔ* πρὸς *ΓΑ*. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ὑπὸ *ΑΔ*, *ΓΕ* πρὸς τὸ ἀπὸ *ΑΓ* τετράγωνον ἐκ τῶν αὐτῶν· ὡς ἄρα τὸ εἶδος πρὸς τὸ

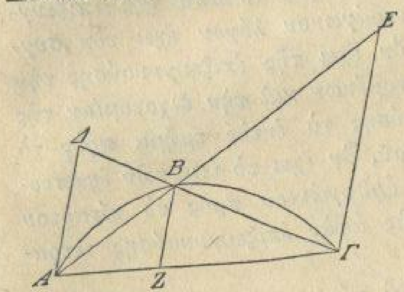
2. ἐν] e corr. p, om. Vc. 10. τεταγμένως κατηγμένην] τεταγμένην V; corr. Halley. 11. διήχθωσαν] v, διη- corr. ex η m. 1 V; ἤχθωσαν c. 12. *ΑΔ*] pcv, post *Α* del. *Β* m. 1 V. 21. *ΖΑ*] *ΒΑ* V; corr. Comm.

et $\Gamma E + E\Delta = 2H\Theta$. uerum etiam $AB = 2H\Theta$ [prop. L]. ergo $AB = \Gamma E + E\Delta$.

LIII.

Si in hyperbola uel ellipsi uel circulo uel oppositis a terminis diametri rectae ordinate ductae parallelae rectae ducuntur, et ab iisdem terminis ad idem punctum lineae ductae rectae parallelas secant, rectangulum comprehensum partibus abscisis figurae eidem diametro adplicatae aequale est.

sit una sectionum, quas diximus, $AB\Gamma$, cuius diametrus sit $A\Gamma$, et rectae ordinate ductae parallelae ducantur $A\Delta$, ΓE, ducanturque ABE, $\Gamma B\Delta$. dico, esse $A\Delta \times E\Gamma$ figurae ad $A\Gamma$ adplicatae aequale.



nam a B rectae ordinate ductae parallela ducatur BZ. itaque erit [I, 21], ut $AZ \times Z\Gamma : ZB^2$, ita latus transuersum ad rectum et $A\Gamma^2$ ad figuram. uerum $AZ \times Z\Gamma : ZB^2 = (AZ : ZB) \times (\Gamma Z : ZB)$. itaque ratio figurae ad $A\Gamma^2$ aequalis est

$$(ZB : ZA) \times (BZ : \Gamma Z).$$

est autem $AZ : ZB = A\Gamma : \Gamma E$, $\Gamma Z : ZB = \Gamma A : A\Delta$ [Eucl. VI, 4]; itaque ratio figurae ad

$$A\Gamma^2 = (\Gamma E : \Gamma A) \times (A\Delta : \Gamma A).$$

Praeter nostram figuram aliam habet V in oppositis, sed imperfectam et litteris omissis; in nostra quoque litterae a manu 2 esse uideri possunt.

ἀπὸ τῆς $A\Gamma$ τετράγωνον, οὕτως τὸ ὑπὸ $A\Delta, \Gamma E$ πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Gamma$ τετράγωνον. ἴσον ἄρα τὸ ὑπὸ $A\Delta, \Gamma E$ τῷ παρὰ τὴν $A\Gamma$ εἴδει.

νδ'.

Ἐὰν κώνου τομῆς ἢ κύκλου περιφερείας δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς γραμμῆς διαχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἐπιζευγνυούσης τὰς ἁφὰς τετράγωνον λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν τῶν ἐφαπτομένων καὶ τὴν διχοτομίαν τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τὸ ἐντὸς τμῆμα πρὸς τὸ λοιπὸν δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον ὀρθογώνιον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετραγώνου.

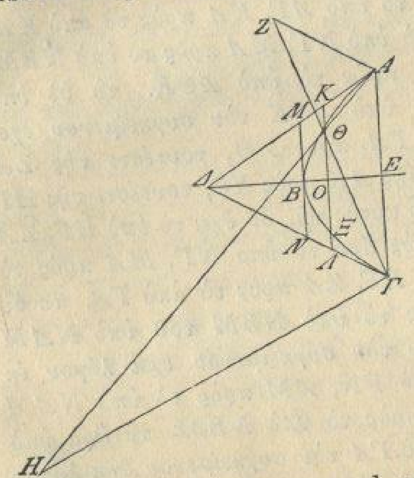
ἔστω κώνου τομὴ ἢ κύκλου περιφέρεια ἡ $AB\Gamma$ καὶ ἐφαπτόμεναι αἱ $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ $A\Gamma$ καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ E, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΔBE, καὶ ἤχθω ἀπὸ μὲν τοῦ A παρὰ τὴν $\Gamma\Delta$ ἡ AZ, ἀπὸ δὲ τοῦ Γ παρὰ τὴν $A\Delta$ ἡ ΓH, καὶ εἰλήφθω τι σημεῖον ἐπὶ τῆς γραμμῆς τὸ Θ, καὶ ἐπιζευχθεῖσαι αἱ $A\Theta$, $\Gamma\Theta$ ἐκβεβλήσθωσαν ἐπὶ τὰ H, Z. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ $AZ, \Gamma H$ πρὸς τὸ ἀπὸ $A\Gamma$ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ἀπὸ EB πρὸς τὸ ἀπὸ $B\Delta$

26. $A\Gamma$] cvp, in V litt. A macula obscurata.

est autem etiam
$$A\Delta \times \Gamma E : A\Gamma^2 = (\Gamma E : \Gamma A) \times (A\Delta : \Gamma A);$$
itaque ut figura ad $A\Gamma^2$, ita $A\Delta \times \Gamma E : A\Gamma^2$. ergo $A\Delta \times \Gamma E$ figurae ad $A\Gamma$ adplicatae aequale est [Eucl. V, 9].

LIV.

Si duae rectae coni sectionem uel circuli ambitum contingentes concurrunt, et per puncta contactus contingentibus parallelae ducuntur, et a punctis contactus ad idem punctum lineae ducuntur rectae parallelas secantes, rectangulum comprehensum partibus abscisis ad quadratum rectae puncta contactus coniungentis rationem habet compositam ex ea, quam habet pars interior rectae coniungentis punctum concursus contingentium punctumque medium rectae puncta contactus coniungentis ad reliquam potentia, et ea, quam habet rectangulum contingentibus comprehensum ad quartam partem quadrati rectae puncta contactus coniungentis.



sit coni sectio uel ambitus circuli $AB\Gamma$ contingen-

In Vv figurae adiectae sunt rectae octo et sex rectangula uel amplius cum litteris.

καὶ τὸ ὑπὸ $A\Delta\Gamma$ προς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ $A\Gamma$, τουτέστι τὸ ὑπὸ $AE\Gamma$.

ἤχθω γὰρ ἀπὸ μὲν τοῦ Θ παρὰ τὴν $A\Gamma$ ἡ $K\Theta O\Xi\Lambda$, ἀπὸ δὲ τοῦ B ἡ MBN· φανερὸν δή, ὅτι ἐφάπτεται ἡ MN. ἐπεὶ οὖν ἴση ἐστὶν ἡ AE τῇ $E\Gamma$, ἴση ἐστὶ καὶ ἡ MB τῇ BN καὶ ἡ KO τῇ $O\Lambda$ καὶ ἡ ΘO τῇ $O\Xi$ καὶ ἡ $K\Theta$ τῇ $\Xi\Lambda$. ἐπεὶ οὖν ἐφάπτονται αἱ MB, MA, καὶ παρὰ τὴν MB ἦκται ἡ $K\Theta\Lambda$, ἔστιν, ὡς τὸ ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ MB, τουτέστι τὸ ὑπὸ MBN, το ἀπὸ AK πρὸς τὸ ὑπὸ $\Xi K\Theta$, τουτέστι τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta K$ [καὶ ἐναλλάξ, ὡς τὸ ἀπὸ AM πρὸς τὸ ἀπὸ AK, το ὑπὸ NBM πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta K$]. ὡς δὲ τὸ ὑπὸ $N\Gamma$, MA πρὸς τὸ ἀπὸ MA, τὸ ὑπὸ $\Lambda\Gamma$, KA πρὸς τὸ ἀπὸ KA· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ὑπὸ $N\Gamma$, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM, τὸ ὑπὸ $\Lambda\Gamma$, KA πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta K$. τὸ δὲ ὑπὸ $\Lambda\Gamma$, KA πρὸς τὸ ὑπὸ $\Lambda\Theta K$ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τῆς $\Gamma\Lambda$ προς $\Lambda\Theta$, τουτέστι τῆς ZA πρὸς $A\Gamma$, καὶ τοῦ τῆς AK πρὸς $K\Theta$, τουτέστι τῆς $H\Gamma$ πρὸς ΓA, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ $H\Gamma$, ZA πρὸς τὸ ἀπὸ ΓA· ὡς ἄρα τὸ ὑπο $N\Gamma$, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM, τὸ ὑπὸ $H\Gamma$, ZA πρὸς τὸ ἀπὸ ΓA. τὸ δὲ ὑπὸ ΓN, MA πρὸς τὸ ὑπὸ NBM τοῦ ὑπὸ $N\Delta M$ μέσου λαμβανομένου τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ ΓN, AM πρὸς τὸ ὑπὸ $N\Delta M$ καὶ τὸ ὑπὸ $N\Delta M$ πρὸς τὸ ὑπὸ NBM· τὸ ἄρα ὑπὸ $H\Gamma$, ZA πρὸς τὸ ἀπὸ ΓA τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ ΓN, AM πρὸς τὸ ὑπὸ $N\Delta M$ καὶ τοῦ ὑπὸ $N\Delta M$ πρὸς τὸ ὑπὸ NBM. ἀλλ᾽ ὡς μὲν τὸ ὑπὸ $N\Gamma$, AM πρὸς τὸ ὑπὸ $N\Delta M$, τὸ ἀπὸ EB πρὸς

3. $K\Theta O\Xi\Lambda$] p, $\Theta K\Lambda\Xi O$ V. 4. MBN] p, BMN V. 11. καί—12. $\Lambda\Theta K$] deleo cum Halleio. 27. τοῦ τοῦ] scripsi; τοῦ V.

tesque $A\Delta$, $\Gamma\Delta$, et ducatur $A\Gamma$ seceturque in E in duas partes aequales, et ducatur ΔBE, et ab A rectae $\Gamma\Delta$ parallela ducatur AZ, a Γ autem rectae $A\Delta$ parallela ΓH, sumaturque in linea punctum aliquod Θ, et ductae $A\Theta$, $\Gamma\Theta$ ad H, Z producantur. dico, esse

$$AZ \times \Gamma H : A\Gamma^2 = (EB^2 : B\Delta^2) \times (A\Delta \times \Delta\Gamma : \tfrac{1}{4} A\Gamma^2)$$
$$= (EB^2 : B\Delta^2) \times (A\Delta \times \Delta\Gamma : AE \times E\Gamma).$$

ducatur enim a Θ rectae $A\Gamma$ parallela $K\Theta O\Xi\Lambda$, a B autem MBN; manifestum igitur, MN contingere [I, 32]. iam quoniam $AE = E\Gamma$, erit etiam $MB = BN$, $KO = O\Lambda$ [Eucl. VI, 4; V, 16] et $\Theta O = O\Xi$ [II, 7; I, 46—47], $K\Theta = \Xi\Lambda$. quoniam igitur MB, MA contingunt, et rectae MB parallela ducta est $K\Theta\Lambda$, erit [prop. XVI] $AM^2 : MB^2 = AK^2 : \Xi K \times K\Theta$, hoc est $AM^2 : MB \times BN = AK^2 : \Lambda\Theta \times \Theta K$. est autem

$$N\Gamma \times MA : MA^2 = \Lambda\Gamma \times KA : KA^2$$

[Eucl. VI, 2; V, 18]; ex aequo igitur

$$N\Gamma \times MA : NB \times BM = \Lambda\Gamma \times KA : \Lambda\Theta \times \Theta K$$

[Eucl. V, 22]. est autem

$$\Lambda\Gamma \times KA : \Lambda\Theta \times \Theta K = (\Gamma\Lambda : \Lambda\Theta) \times (AK : K\Theta)$$
$$= (ZA : A\Gamma) \times (H\Gamma : \Gamma A) \text{ [Eucl. VI, 4]}$$
$$= H\Gamma \times ZA : \Gamma A^2.$$

itaque $N\Gamma \times MA : NB \times BM = H\Gamma \times ZA : \Gamma A^2$.

est autem

$$\Gamma N \times MA : NB \times BM$$
$$= (\Gamma N \times MA : N\Delta \times \Delta M) \times (N\Delta \times \Delta M : NB \times BM)$$

medio sumpto $N\Delta \times \Delta M$. itaque

$$H\Gamma \times ZA : \Gamma A^2$$
$$= (\Gamma N \times AM : N\Delta \times \Delta M) \times (N\Delta \times \Delta M : NB \times BM).$$

τὸ ἀπὸ ΒΔ, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΝΔΜ πρὸς το ὑπο ΝΒΜ, τὸ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ· τὸ ἄρα ὑπὸ ΗΓ, ΑΖ πρὸς τὸ ἀπὸ ΑΓ τὸν συγκείμενον ἔχει λόγον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ ΒΕ πρὸς τὸ ἀπὸ ΒΔ καὶ τοῦ ὑπὸ ΓΔΑ πρὸς τὸ ὑπὸ ΓΕΑ.

νε'.

Ἐὰν τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, καὶ διὰ μὲν τῆς συμπτώσεως ἀχθῇ εὐθεῖα παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν, ἀπὸ δὲ τῶν ἁφῶν διαχθῶσι παράλληλοι ταῖς ἐφαπτομέναις, προσβληθῶσι δὲ ἀπὸ τῶν ἁφῶν πρὸς τὸ αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον λόγον ἕξει, ὃν το ὑπο τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ ἀπὸ τῆς ἠγμένης διὰ τῆς συμπτώσεως παρὰ τὴν τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνύουσαν ἕως τῆς τομῆς.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ ΑΒΓ, ΔΕΖ, ἐφαπτόμεναι δὲ αὐτῶν αἱ ΑΗ, ΗΔ, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ ΑΔ, καὶ ἀπο μὲν τοῦ Η παρὰ τὴν ΑΔ ἤχθω ἡ ΓΗΕ, ἀπὸ δὲ τοῦ Α παρὰ τὴν ΔΗ ἡ ΑΜ, ἀπὸ δὲ τοῦ Δ παρὰ τὴν ΑΗ ἡ ΔΜ, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ΔΖ τομῆς τὸ Ζ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΑΝΖ, ΖΔΘ. λέγω, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΗΔ, τὸ ἀπὸ ΑΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΑΘ, ΝΔ.

ἤχθω γὰρ διὰ τοῦ Ζ παρὰ τὴν ΑΔ ἡ ΖΛΚΒ.

ἐπεὶ οὖν δέδεικται, ὅτι ἐστίν, ὡς τὸ ἀπὸ ΕΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, οὕτως τὸ ὑπὸ ΒΛΖ πρὸς το ἀπὸ

3. τοῦ τοῦ] τοῦ V; corr. Halley. 23. Ante λέγω spatium 4—5 litt. hab. V.

uerum $N\Gamma \times AM : N\Delta \times \Delta M = EB^2 : B\Delta^2$ [u. Eutocius] et

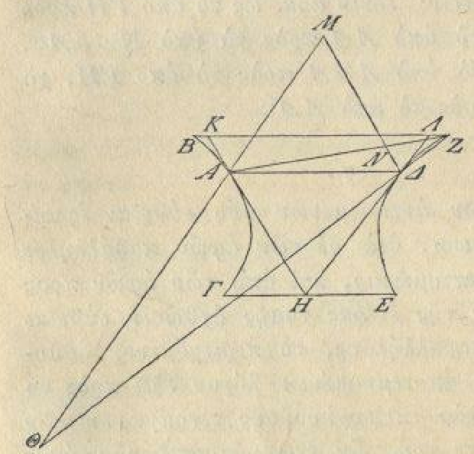
$$N\Delta \times \Delta M : NB \times BM = \Gamma\Delta \times \Delta A : \Gamma E \times EA$$

[ibid.]; ergo

$$H\Gamma \times AZ : A\Gamma^2 = (BE^2 : B\Delta^2) \times (\Gamma\Delta \times \Delta A : \Gamma E \times EA).$$

LV.

Si duae rectae oppositas contingentes concurrunt, et per punctum concursus recta ducitur rectae puncta contactus coniungenti parallela, a punctis contactus autem rectae contingentibus parallelae ducuntur, et a punctis contactus ad idem punctum alterius sectionis rectae adcidunt parallelas secantes, rectangulum comprehensum partibus abscisis ad quadratum rectae puncta contactus coniungentis rationem habebit, quam rectangulum comprehensum contingentibus ad quadratum rectae per punctum concursus ductae rectae puncta contactus coniungenti parallelae usque ad sectionem.



sint oppositae $AB\Gamma$, ΔEZ easque contingentes AH, $H\Delta$, ducaturque $A\Delta$, et ab H rectae $A\Delta$ par-

ΔA, ἴση δὲ ἡ μὲν ΓΗ τῇ ΕΗ, ἡ δὲ ΒΚ τῇ AΖ, ὡς ἄρα τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ἀπὸ ΗΔ, τὸ ὑπὸ ΚΖA πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ἀπὸ ΔΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗA, τὸ ἀπὸ ΔA πρὸς το ὑπὸ ΔA, AΚ· δι᾽ ἴσου ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗA, το ὑπὸ ΚΖA πρὸς τὸ ὑπὸ ΔA, AΚ. ὁ δὲ τοῦ ὑπο ΚΖA πρὸς το ὑπὸ AΚ, ΔA λόγος ὁ συγκείμενός ἐστιν ἐκ τοῦ τῆς ΖΚ πρὸς ΚA καὶ τοῦ τῆς ΖA προς AΔ. ἀλλ᾽ ὡς μὲν ἡ ΖΚ πρὸς ΚA, ἡ AΔ προς ΔΝ, ὡς δὲ ἡ ΖA πρὸς AΔ, ἡ AΔ πρὸς ΘA· ὁ ἄρα τοῦ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ ΔΗA λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τῆς AΔ πρὸς ΔΝ καὶ τοῦ τῆς ΔA πρὸς AΘ. σύγκειται δὲ καὶ ὁ τοῦ ἀπὸ AΔ πρὸς τὸ ὑπὸ AΘ, ΝΔ λόγος ἐκ τῶν αὐτῶν· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ ΓΗ πρὸς τὸ ὑπὸ AΗΔ, τὸ ἀπὸ AΔ πρὸς τὸ ὑπὸ ΝΔ, AΘ. [ἀνάπαλιν, ὡς τὸ ὑπὸ AΗΔ πρὸς τὸ ἀπο ΓΗ, τὸ ὑπὸ ΝΔ, AΘ πρὸς τὸ ἀπὸ AΔ].

νϛʹ.

Ἐὰν μιᾶς τῶν ἀντικειμένων δύο εὐθεῖαι ἐφαπτόμεναι συμπίπτωσι, διὰ δὲ τῶν ἁφῶν παράλληλοι ἀχθῶσι ταῖς ἐφαπτομέναις, καὶ ἀπο τῶν ἁφῶν προς το αὐτὸ σημεῖον τῆς ἑτέρας τομῆς ἀχθῶσιν εὐθεῖαι τέμνουσαι τὰς παραλλήλους, τὸ περιεχόμενον ὀρθογώνιον ὑπὸ τῶν ἀποτεμνομένων λόγον ἕξει πρὸς το ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης τετράγωνον τὸν συγκείμενον ἔκ τε τοῦ, ὃν ἔχει τῆς ἐπιζευγνυούσης τὴν σύμπτωσιν καὶ τὴν διχοτομίαν ἡ μεταξὺ τῆς διχοτομίας καὶ τῆς ἑτέρας τομῆς πρὸς τὴν μεταξὺ τῆς αὐτῆς

16. ἀνάπαλιν — 17. AΔ] deleo. 24. λόγον ἕξει] bis V; corr. pc.

allela ducatur ΓHE, ab A autem rectae ΔH parallela AM, a Δ autem rectae AH parallela ΔM, et in sectione ΔZ sumatur punctum aliquod Z, ducanturque ANZ, $Z\Delta\Theta$. dico, esse

$$\Gamma H^2 : AH \times H\Delta = A\Delta^2 : A\Theta \times N\Delta.$$

nam per Z rectae $A\Delta$ parallela ducatur $ZAKB$. quoniam igitur demonstratum est, esse

$$EH^2 : H\Delta^2 = BA \times AZ : \Delta A^2 \text{ [prop. XX]},$$

et $\Gamma H = EH$, $BK = AZ$ [II, 38; Eucl. VI, 4], erit $\Gamma H^2 : H\Delta^2 = KZ \times ZA : A\Delta^2$. uerum etiam $\Delta H^2 : \Delta H \times HA = \Delta A^2 : \Delta A \times AK$ [Eucl. VI, 2]; ex aequo igitur [Eucl. V, 22]

$$\Gamma H^2 : \Delta H \times HA = KZ \times ZA : \Delta A \times AK.$$

uerum

$$KZ \times ZA : AK \times \Delta A = (ZK : KA) \times (ZA : A\Delta).$$

est autem $ZK : KA = A\Delta : \Delta N$,

$$ZA : A\Delta = A\Delta : \Theta A \text{ [Eucl. VI, 4]};$$

itaque $\Gamma H^2 : \Delta H \times HA = (A\Delta : \Delta N) \times (\Delta A : A\Theta)$. est autem

$$A\Delta^2 : A\Theta \times N\Delta = (A\Delta : \Delta N) \times (\Delta A : A\Theta).$$

ergo $\Gamma H^2 : AH \times H\Delta = A\Delta^2 : N\Delta \times A\Theta$.

LVI.

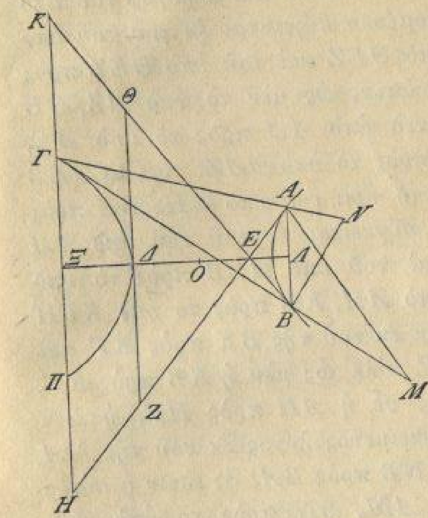
Si duae rectae alteram oppositarum contingentes concurrunt, et per puncta contactus contingentibus parallelae ducuntur, a punctis contactus autem ad idem punctum alterius sectionis rectae ducuntur secantes parallelas, rectangulum comprehensum partibus abscisis ad quadratum rectae puncta contactus coniungentis rationem habebit compositam ex ea, quam habet rectae punctum concursus punctumque medium τομῆς καὶ τῆς συμπτώσεως δυνάμει, καὶ τοῦ, ὃν ἔχει τὸ ὑπο τῶν ἐφαπτομένων περιεχόμενον πρὸς τὸ τέταρτον μέρος τοῦ ἀπὸ τῆς τὰς ἁφὰς ἐπιζευγνυούσης.

ἔστωσαν ἀντικείμεναι αἱ AB, $\Gamma\Delta$, ὧν κέντρον τὸ O, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ $AEZH$, $BE\Theta K$, καὶ ἐπεζεύχθω ἡ AB καὶ δίχα τετμήσθω κατὰ τὸ Λ, καὶ ἐπιζευχθεῖσα ἡ ΛE διήχθω ἐπὶ τὸ Δ, καὶ ἤχθω ἀπὸ τοῦ A παρὰ τὴν BE ἡ AM, ἀπὸ δὲ τοῦ B παρὰ τὴν AE ἡ BN, εἰλήφθω δέ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς $\Gamma\Delta$ τομῆς τὸ Γ, καὶ ἐπεζεύχθωσαν αἱ ΓBM, ΓAN. λέγω, ὅτι τὸ ὑπὸ BN, AM πρὸς τὸ ἀπὸ AB λόγον ἔχει τὸν συγκείμενον ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE καὶ τοῦ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ τέταρτον τοῦ ἀπὸ AB, τουτέστι τὸ ὑπὸ $A\Lambda B$.

ἤχθωσαν γὰρ ἀπὸ τῶν Γ, Δ παρὰ τὴν AB αἱ $H\Gamma K$, $\Theta\Delta Z$· φανερὸν δή, ὅτι [ἴση ἐστὶν ἡ $A\Lambda$ τῇ ΛB] ἴση ἐστὶ καὶ ἡ $\Theta\Delta$ τῇ ΔZ καὶ ἡ $K\Xi$ τῇ ΞH. ἔστι δὲ καὶ ἡ $\Xi\Gamma$ τῇ $\Xi\Pi$· ὥστε καὶ ἡ ΓK τῇ $H\Pi$. καὶ ἐπεὶ ἀντικείμεναί εἰσιν αἱ AB, $\Delta\Gamma$, ἐφαπτόμεναι δὲ αἱ $BE\Theta$, $\Theta\Delta$, καὶ παρὰ τὴν $\Delta\Theta$ ἡ KH, ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $B\Theta$ πρὸς τὸ ἀπὸ $\Theta\Delta$, τὸ ἀπὸ BK πρὸς τὸ ὑπὸ $\Pi K\Gamma$. ἴσον δὲ τὸ μὲν ἀπὸ $\Theta\Delta$ τῷ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$, τὸ δὲ ὑπὸ $\Pi K\Gamma$ τῷ ὑπὸ $K\Gamma H$· ἔστιν ἄρα, ὡς τὸ ἀπὸ $B\Theta$ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$, τὸ ἀπὸ BK πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Gamma H$. ἔστι δὲ καί, ὡς τὸ ὑπὸ ZA, ΘB πρὸς

5. $AEZH$] p; $AEHZ$ V, H e corr. m. 1; $AENZ$ cv. 12. ἐκ] om. V (extr. lin.); corr. p (ἔκ τε). τοῦ τοῦ] scripsi, τοῦ V. 14. ὑπό] bis V (extr. et initio lineae); corr. cp. 16. $H\Gamma K$] Halley; ΓHK V, $K\Gamma H$ p. $\Theta\Delta Z$] p, $\Delta\Theta Z$ V. ἴση — 17. ΛB] deleo. 17. ἴση ἐστί] om. p. $\Theta\Delta$] $\Delta\delta$ V; corr. p; $\Lambda\Delta$ c. ΞH] ZH V; corr. p. 18. ΓK] pcv, K e corr. m. 1 V. 19. $\Delta\Gamma$] ΔE V; corr. p. 20. $BE\Theta$] BE V; corr. Halley. 22. πρός] bis V (extr. et init. lin.); corr. pc. 23. $K\Gamma H$] ΓKH V; corr. p.

coniungentis pars inter punctum medium alteramque sectionem posita ad rectam inter eandem sectionem punctumque concursus positam potentia, eaque, quam habet rectangulum contingentibus comprehensum ad quartam partem quadrati rectae puncta contactus coniungentis.



sint oppositae AB, $\Gamma\Delta$, quarum centrum sit O, contingentes autem $AEZH$, $BE\Theta K$, ducaturque AB et in Λ in duas partes aequales secetur, ducta autem ΛE ad Δ producatur, et ab A rectae BE parallela ducatur AM, a B autem rectae AE parallela BN, sumaturque in sectione $\Gamma\Delta$ punctum aliquod Γ, et ducantur ΓBM, ΓAN. dico, esse

$$BN \times AM : AB^2 = (\Lambda\Delta^2 : \Delta E^2) \times (AE \times EB : \tfrac{1}{4} AB^2)$$
$$= (\Lambda\Delta^2 : \Delta E^2) \times (AE \times EB : A\Lambda \times \Lambda B).$$

ducantur enim a Γ, Δ rectae AB parallelae $H\Gamma K$, $\Theta\Delta Z$; manifestum igitur, esse et $\Theta\Delta = \Delta Z$ et $K\Xi = \Xi H$ [Eucl. VI, 4]. uerum etiam $\Xi\Gamma = \Xi\Pi$ [I, 47]; itaque etiam $\Gamma K = H\Pi$. et quoniam oppositae sunt AB, $\Delta\Gamma$, contingentes autem $BE\Theta$, $\Theta\Delta$, et KH rectae $\Delta\Theta$ parallela, erit [prop. XVIII]

$$B\Theta^2 : \Theta\Delta^2 = BK^2 : \Pi K \times K\Gamma.$$

τὸ ἀπὸ ΘB, τὸ ὑπὸ HA, KB πρὸς τὸ ἀπὸ KB· δι' ἴσου ἄρα ἐστίν, ὡς τὸ ὑπὸ AZ, ΘB πρὸς τὸ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$, τὸ ὑπὸ KB, AH πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Gamma H$. ὁ δὲ τοῦ ὑπὸ AZ, ΘB πρὸς τὸ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$ λόγος τοῦ ὑπὸ ΘEZ μέσου λαμβανομένου σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ὑπὸ AZ, ΘB πρὸς τὸ ὑπὸ ΘEZ καὶ τοῦ ὑπὸ ΘEZ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$· καί ἐστιν, ὡς μὲν τὸ ὑπὸ AZ, ΘB πρὸς τὸ ὑπὸ ΘEZ, τὸ ἀπὸ $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE, ὡς δὲ τὸ ὑπὸ ΘEZ πρὸς τὸ ὑπὸ $\Theta\Delta Z$, τὸ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Lambda B$· ὁ ἄρα τοῦ ὑπὸ AH, BK πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Gamma H$ λόγος σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE καὶ τοῦ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Lambda B$. ἔχει δὲ τὸ ὑπὸ AH, KB πρὸς τὸ ὑπὸ $K\Gamma H$ τὸν συγκείμενον λόγον ἐκ τοῦ τῆς BK πρὸς $K\Gamma$ καὶ τοῦ τῆς AH πρὸς $H\Gamma$. ἀλλ' ὡς μὲν ἡ KB πρὸς $K\Gamma$, ἡ MA πρὸς AB, ὡς δὲ ἡ AH πρὸς $H\Gamma$, ἡ BN πρὸς BA· ὁ ἄρα συγκείμενος λόγος ἐκ τοῦ τῆς MA πρὸς AB καὶ τοῦ τῆς NB πρὸς BA, ὅς ἐστιν ὁ αὐτὸς τῷ, ὃν ἔχει τὸ ὑπὸ AM, BN πρὸς τὸ ἀπὸ AB, σύγκειται ἐκ τοῦ τοῦ ἀπὸ $\Lambda\Delta$ πρὸς τὸ ἀπὸ ΔE καὶ τοῦ ὑπὸ AEB πρὸς τὸ ὑπὸ $A\Lambda B$.

---

5. τοῦ τοῦ] τοῦ V; corr. Halley. 11. τοῦ τοῦ] τοῦ V; corr. Halley. 17. πρὸς BA] om. V; corr. p. 20. τοῦ τοῦ] τοῦ V; corr. Halley. In fine: Ἀπολλωνίου Περγαίου κωνικῶν τρίτον m. 2 V, τέλος τοῦ τρίτου τῶν κωνικῶν p.

est autem $\Theta\Delta^2 = \Theta\Delta \times \Delta Z$,

$$\Pi K \times K\Gamma = K\Gamma \times \Gamma H;$$

itaque $B\Theta^2 : \Theta\Delta \times \Delta Z = BK^2 : K\Gamma \times \Gamma H$.

uerum etiam $ZA \times \Theta B : \Theta B^2 = HA \times KB : KB^2$ [Eucl. VI, 2, 4; V, 12]; ex aequo igitur

$$AZ \times \Theta B : \Theta\Delta \times \Delta Z = KB \times AH : K\Gamma \times \Gamma H$$

[Eucl. V, 22]. est autem, medio sumpto $\Theta E \times EZ$,

$$AZ \times \Theta B : \Theta\Delta \times \Delta Z$$
$$= (AZ \times \Theta B : \Theta E \times EZ) \times (\Theta E \times EZ : \Theta\Delta \times \Delta Z).$$

et $AZ \times \Theta B : \Theta E \times EZ = \Lambda\Delta^2 : \Delta E^2$ [Eucl. VI, 4; V, 12, 16],

$$\Theta E \times EZ : \Theta\Delta \times \Delta Z = AE \times EB : A\Lambda \times \Lambda B$$

[u. Pappi lemma XIII]; itaque

$$AH \times BK : K\Gamma \times \Gamma H$$
$$= (\Lambda\Delta^2 : \Delta E^2) \times (AE \times EB : A\Lambda \times \Lambda B).$$

est autem

$$AH \times KB : K\Gamma \times \Gamma H = (BK : K\Gamma) \times (AH : H\Gamma).$$

uerum $KB : K\Gamma = MA : AB$, $AH : H\Gamma = BN : BA$ [Eucl. VI, 4]. ergo

$$(MA : AB) \times (NB : BA)$$
$$= (\Lambda\Delta^2 : \Delta E^2) \times (AE \times EB : A\Lambda \times \Lambda B)$$
$$= AM \times BN : AB^2.$$